

## ***TESIS DOCTORAL***

# ***Análisis de los efectos de borde en laminados de material compuesto mediante modelos numéricos***

**Autor:**

***Alberto Solís Fajardo***

**Directores:**

**Dr. Enrique Barbero Pozuelo**

**Dra. Sonia Sánchez Sáez**

**Tutor:**

**Dr. Enrique Barbero Pozuelo**

**Doctorado en Ingeniería Mecánica y de Organización Industrial**

Leganés, mayo 2018



**TESIS DOCTORAL**

*Análisis de los efectos de borde en laminados de material compuesto mediante modelos numéricos*

Autor: **Alberto Solís Fajardo**

Directores: *Dr. Enrique Barbero Pozuelo*  
*Dra. Sonia Sánchez Sáez*

**Tribunal Calificador:**

*Firma*

**Presidente:** *(Nombre y apellidos)*

**Vocal:** *(Nombre y apellidos)*

**Secretario:** *(Nombre y apellidos)*

**Calificación:**

**Leganés,        de        de 2018**



## *Agradecimientos*

Este trabajo está dedicado, fundamentalmente, a mis padres que siempre han sabido darme sólo lo que necesitaba. Lo que aquí se recoge y todo lo que ha implicado, permite cerrar un ciclo en el que ellos han sido los máximos impulsores.

Me gustaría agradecer a mis directores, Enrique y Sonia, la oportunidad que me han dado de poder trabajar en el departamento y rescatarme de otros entornos laborales diferentes de la investigación. Me gustaría agradecerles, sobre todo en los últimos meses, que me hayan ayudado a pulir el texto y decidir qué poner y qué no poner. Sin ellos, el resultado hubiera sido diferente.

Tampoco quiero dejar pasar la ocasión de dar las gracias a la gente del CIMNE, sobre todo a Xavi Martínez que, durante mi estancia, me abrió la puerta a un reservorio formidable de conocimiento que me ha permitido orientar una parte de mi investigación. También me gustaría agradecer a Alex Ferrer, además de su amistad, el maravilloso apoyo logístico que me brindó en Barcelona.

Me gustaría agradecer a todos los compañeros del departamento que, en algún momento, me hayan prestado ayuda o, simplemente, me hayan permitido disfrutar de una conversación gustosa. Gracias a ellos, el camino ha sido mucho más agradable.

Y por último, aunque no menos importante, me gustaría dar las gracias a la persona que más ha soportado soportarme mientras que esta tesis se cocía, a Irene. Su consejo forzoso de una hora al día, al menos, sin conversaciones en la que los métodos numéricos, los medios continuos o las tensiones en el borde tuvieran algo que ver, ha resultado satisfactorio. Estoy deseando empezar el otro proyecto.



## *Resumen*

La presente Tesis Doctoral aborda el estudio de las tensiones interlaminares que aparecen en las inmediaciones de los bordes libres de laminados de material compuesto intactos o en presencia de concentradores de tensión cuando se someten a cargas en su plano. Este estudio consiste en el análisis de los fenómenos de borde libre que ocurren en dos casos diferenciados.

En primer lugar, se analizan las tensiones que se desarrollan a la altura de la interfase, en el borde libre, entre láminas cuyas fibras tienen diferentes orientaciones, pertenecientes a laminados intactos sometidos a estados de carga uniaxial de tracción. Se estudian las tensiones fuera del plano que aparecen para diferentes secuencias de apilamiento, analizando el cambio de los valores de las tensiones cuando se varía la orientación de las fibras. El modelo utilizado se basa en un enfoque macroscópico del comportamiento de la lámina que, convenientemente simplificado, permite reducir las ecuaciones a un esquema de diferencias finitas que proporciona el valor de los desplazamientos en puntos discretos del sólido. El método utilizado ha sido validado con resultados de la literatura científica y la realización de ensayos experimentales. La variable que se ha seleccionado, como indicador de la presencia de efectos de borde, es el gradiente del desplazamiento longitudinal en el ancho del laminado, que una vez medido experimentalmente permite corroborar la presencia de las tensiones interlaminares.

En segundo lugar, se analizan las tensiones interlaminares que se desarrollan en las inmediaciones de los bordes libres de un laminado con un agujero en el centro geométrico del mismo y que se encuentra sometido a un estado uniaxial de compresión. Para modelar el micropandeo de las fibras alineadas con la dirección de la carga, se propone un modelo fenomenológico de daño continuo isótropo para la fibra, combinado con la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo como ley constitutiva del material compuesto. Los parámetros del modelo se fijan utilizando resultados experimentales, extraídos de la literatura, correspondientes a un ensayo de compresión de un laminado sin agujero con las fibras orientadas en la dirección de la carga. Con los parámetros calibrados, el modelo se valida con los resultados correspondientes a dos ensayos de compresión, uno consistente en un laminado sin agujero con las fibras orientadas según diferentes direcciones y otro con agujero con la misma secuencia de apilamiento. Posteriormente, se evalúan las tensiones interlaminares, a lo largo del espesor, tanto en el borde libre del agujero como en el extremo. Finalmente, se analizan las tensiones en el agujero en las láminas con diferentes orientaciones y se repite el estudio para diferentes secuencias de apilamiento.

## *Abstract*

This PHD Thesis deals with the study of interlaminar stresses of unnotched and notched composite laminates under in-plane loads. The study consists of the analysis of the free-edge effects in two different cases.

Firstly, an analysis of the influence of fibre orientation on the interlaminar stresses of unnotched composite laminates subjected to traction load was carried out. The analysis is focused, near the free edge, on the interphase between plies with different fibre orientations. A finite difference scheme was implemented in order to obtain the displacements of the discrete material points. This numerical method has been validated using scientific literature and experimental data as well. The presence of a displacement gradient, across the width, was demonstrated using this finite difference scheme. The study showed that the maximum value is dependent on the orientation of the plies in the laminate. The displacement gradient is related to interlaminar stresses, which in turn are dependent on fibre orientation. In order to study the dependence of the out-of-plane stresses on these parameters, an analysis of symmetric laminates with varying stacking sequences and ply orientations was carried out.

Secondly, interlaminar stresses near the free edge of an open-hole composite laminate subjected to compression load, were studied. In order to deal with the 0 fibre microbuckling, a phenomenological continuum isotropic damage model is proposed. In addition, the Serial/Parallel Mixture Theory is considered as the composite constitutive law. In the model proposed, damage parameters are required. In this Thesis, these damage parameters are fixed by using experimental data, available in the scientific literature, corresponding to an unidirectional unnotched laminate subjected to compression load. Afterwards the model is validated using two different compression tests, one for a multidirectional unnotched laminate and another for a laminate with an open-hole in the geometrical centre. Finally, after model validation, the interlaminar stresses, through the laminate thickness and around the hole, are studied by comparing results varying the stacking sequence.



## *Tabla de Contenido*

<b>1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación.....	3
1.2. Objetivos.....	5
1.3. Estructura del trabajo.....	7
Bibliografía.....	10
 <b>2. Aspectos Preliminares.....</b>	 <b>11</b>
2.1. Introducción.....	13
2.2. Campo de deformaciones de un medio continuo. Pequeñas deformaciones.....	14
Pequeñas deformaciones.....	20
2.3. Teoría del Laminado.....	22
2.4. Tensores secante y tangente.....	26
Bibliografía.....	30
 <b>3. Análisis del Efecto de Borde.....</b>	 <b>31</b>
3.1. Introducción.....	33
3.2. Descripción del problema y ejes de ortotropía.....	35
3.3. Ecuaciones de campo y condiciones de contorno.....	40

Forma funcional del campo de desplazamiento.....	40
Condiciones de simetría.....	44
Ecuaciones de campo y condiciones de contorno.....	48
3.4. Discretización del problema.....	52
Fórmulas de aproximación.....	52
Discretización de las ecuaciones de campo y condiciones de contorno.....	57
Recuperación de deformaciones y tensiones.....	62
3.5. Esquema del método.....	66
3.6. Análisis de sensibilidad de malla.....	69
3.7. Validación del modelo.....	77
3.8. Resultados y discusión.....	84
Análisis de las tensiones interlaminares y desplazamiento longitudinal.....	84
Resultados experimentales.....	89
Influencia de la secuencia de apilamiento y la orientación de las fibras.....	92
3.9. Conclusiones del capítulo.....	102
Bibliografía.....	106
<b>4. Soporte de Elementos Finitos.....</b>	<b>109</b>
4.1. Introducción.....	111
4.2. El Método de los Elementos Finitos.....	113
El Teorema de los Trabajos Virtuales.....	115
Aspectos Termodinámicos.....	119
Planteamiento general para obtener una forma del Método de los Elementos Finitos.....	127
4.3. Problemas no lineales. El Método de Newton-Raphson.....	144

4.4.	Funciones de forma y puntos de cuadratura.....	154
	Elementos isoparamétricos de ocho nodos y funciones de forma.....	154
	Puntos de cuadratura.....	163
	Recuperación de gradientes.....	166
	Bibliografía.....	169
<b>5.</b>	<b>Teoría de Mezclas Serie/Paralelo.....</b>	<b>171</b>
5.1.	Introducción.....	173
5.2.	Descripción del modelo Básico Serie/Paralelo.....	182
	Descripción general y variables utilizadas.....	182
	División de los tensores de deformación, tensión y ley de comportamiento en sus partes serie y paralelo.....	184
	Ecuaciones de cierre.....	188
	Método de resolución del modelo Básico Serie/Paralelo.....	188
	Tensor tangente constitutivo del material compuesto.....	190
	Método iterativo para obtener las componentes de las deformaciones de fibra y matriz.....	194
5.3.	Esquema del método.....	198
	Bibliografía.....	202
<b>6.</b>	<b>Modelo de Daño.....</b>	<b>205</b>
6.1.	Introducción.....	207
6.2.	Descripción del modelo.....	210
	Parámetro de daño y función umbral.....	210
	Ley de evolución del parámetro de daño.....	211
	Elección de la función umbral de tensión.....	213
	Conexión del modelo de daño con la Mecánica de la Fractura.....	219

Estados de tensión generalizados.....	221
Tensor constitutivo tangente.....	223
6.3. Esquema del modelo de daño.....	226
Bibliografía.....	229
<b>7. Análisis de Laminados con Concentradores de Tensión.....</b>	<b>231</b>
7.1. Introducción.....	233
7.2. Esquema del método.....	236
7.3. Descripción del problema y calibración del modelo fenomenológico.....	239
Calibración del modelo.....	240
Estudio de sensibilidad de malla.....	244
Validación del modelo.....	248
7.4. Resultados. Análisis de las tensiones interlaminares.....	249
Bibliografía.....	257
<b>8. Conclusiones y Trabajos Futuros.....</b>	<b>259</b>
8.1. Síntesis del trabajo.....	261
8.2. Conclusiones.....	262
8.3. Trabajos futuros.....	264
8.4. Diseminación de resultados.....	266

## Índice de Figuras

Figura 2.1.	Sistemas de referencia. Configuración indeformada ( $X1, X2, X3$ ) y deformada ( $x1, x2, x3$ ) [1].....	14
Figura 2.2.	Curva tensión-deformación para un modelo de daño.....	27
Figura 3.1.	Sistema de ejes geométricos para el laminado.....	35
Figura 3.2.	Relación entre los ejes geométricos de aplicación de la carga y ejes principales.....	36
Figura 3.3.	Corte transversal del laminado en el plano 'yz'.....	45
Figura 3.4.	Esquema de colores para representar la discretización del dominio de interés.....	52
Figura 3.5.	Estrategia de numeración para el esquema de diferencias finitas.....	67
Figura 3.6.	Tensión $\sigma_{xz}$ a través del semiancho en la interfase para distintas mallas.	70
Figura 3.7.	Tensión $\sigma_{xz}$ a través del espesor en el borde libre para distintas mallas...	70
Figura 3.8.	Tensión $\sigma_{zz}$ a través del semiancho en la interfase para distintas mallas....	71
Figura 3.9.	Tensión $\sigma_{zz}$ a través del espesor en el borde libre para distintas mallas.....	71
Figura 3.10.	Tensión $\sigma_{xz}$ a través del semiancho en la interfase más cercana al plano de simetría para distintas mallas.....	72
Figura 3.11.	Tensión $\sigma_{xz}$ a través del semiancho en la interfase intermedia para distintas mallas.....	73
Figura 3.12.	Tensión $\sigma_{xz}$ a través del semiancho en la interfase más lejana al plano de simetría.....	73
Figura 3.13.	Tensión $\sigma_{xz}$ a través del espesor en el borde libre para distintas mallas..	74

Figura 3.14.	Tensión $\sigma_z$ a través del semiancho en la interfase más cercana al plano de simetría.....	74
Figura 3.15.	Tensión $\sigma_z$ a través del semiancho en la interfase intermedia para distintas mallas.....	75
Figura 3.16.	Tensión $\sigma_z$ a través del semiancho en la interfase más lejana al plano de simetría.....	75
Figura 3.17.	Tensión $\sigma_z$ a través del espesor en el borde libre para distintas mallas.....	76
Figura 3.18.	Tensión $\sigma_z$ en la interfase para un laminado $[0^\circ, 90^\circ]_s$ a lo largo del semiancho.....	77
Figura 3.19.	Tensión $\sigma_z$ en la interfase para un laminado $[90^\circ, 0^\circ]_s$ a lo largo del semiancho	78
Figura 3.20.	Tensión $\sigma_z$ a lo largo del borde libre para un laminado $[0^\circ, 90^\circ]_s$ .....	78
Figura 3.21.	Tensión $\sigma_z$ a lo largo del borde libre para un laminado $[90^\circ, 0^\circ]_s$ .....	79
Figura 3.22.	Tensión $\sigma_{yz}$ a lo largo de z (al 92% de la distancia hasta el borde libre) para un laminado $[0^\circ, 90^\circ]_s$ .....	80
Figura 3.23.	Tensión $\sigma_{yz}$ a lo largo de z (al 92% de la distancia hasta el borde libre) para un laminado $[90^\circ, 0^\circ]_s$ .....	80
Figura 3.24.	Tensión $\sigma_{yz}$ en la interfase para un laminado $[0^\circ, 90^\circ]_s$ a lo largo del semiancho.....	81
Figura 3.25.	Tensión $\sigma_{yz}$ en la interfase para un laminado $[90^\circ, 0^\circ]_s$ a lo largo del semiancho.....	81
Figura 3.26.	Evolución de las tensiones a lo largo del semiancho del laminado $[45^\circ, -45^\circ]_s$ en la interfase.....	83
Figura 3.27.	Evolución de $\sigma_{xz}$ a lo largo del espesor del laminado $[45^\circ, -45^\circ]_s$ .....	83
Figura 3.28.	Evolución de $U(y, z)$ a lo largo del espesor del laminado $[45^\circ, -45^\circ]_s$ ....	86
Figura 3.29.	Evolución de $U(y, 2h_o)$ a lo largo del ancho en la cara superior del laminado $[45^\circ, -45^\circ]_s$ .....	87
Figura 3.30.	Valor de $U$ en el extremo cuando se varía el ángulo de inclinación de las fibras. Secuencia $[45^\circ, -45^\circ]_s$ .....	88
Figura 3.31.	Disposición de los puntos de referencia en la probeta.....	90
Figura 3.32.	Gradiente del desplazamiento longitudinal en la superficie del laminado $[\theta_7, -\theta_7]_s$ y $\epsilon_x = 0.69\%$ .....	91

Figura 3.33.	Máximo valor del desplazamiento longitudinal en función de $\theta$ para un laminado $[\theta 7, -\theta 7]_s$ y $\epsilon x = 0.69\%$ .....	92
Figura 3.34.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la interfase. Secuencia $[\theta, -\theta]_s$ .....	94
Figura 3.35.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la interfase. Secuencia $[-\theta, \theta]_s$ .....	95
Figura 3.36.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la interfase. Secuencia $[2\theta, -\theta]_s$ .....	96
Figura 3.37.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la interfase. Secuencia $[-\theta, 2\theta]_s$ .....	97
Figura 3.38.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la primera interfase. Secuencia $[\theta, \theta, -\theta]_s$ .....	98
Figura 3.39.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la primera interfase. Secuencia $[\theta, -\theta, \theta]_s$ .....	98
Figura 3.40.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la primera interfase. Secuencia $[\theta, 2\theta, -\theta]_s$ .....	99
Figura 3.41.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la primera interfase. Secuencia $[\theta, -\theta, 2\theta]_s$ .....	100
Figura 3.42.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la segunda interfase. Secuencia $[\theta, 2\theta, -\theta]_s$ .....	101
Figura 3.43.	Tensiones interlaminares en el borde libre en la segunda interfase. Secuencia $[\theta, -\theta, 2\theta]_s$ .....	101
Figura 4.1.	Mallado del dominio de interés.....	139
Figura 4.2.	Variables globales. Desplazamientos y fuerzas en el nodo.....	140
Figura 4.3.	Variables elementales.....	141
Figura 4.4.	Método de Newton-Raphson.....	149
Figura 4.5.	Esquema del método iterativo propuesto para el esquema de elementos finitos.....	151
Figura 4.6.	Cambio de variables entre las coordenadas locales elementales $(\xi, \eta, \varphi)$ y las coordenadas globales $(x, y, z)$ .....	155
Figura 4.7.	Estrategia de composición de los campos de tensión y deformación.....	167

	basada en promedios.....	
Figura 4.8.	Estrategia de composición de los campos de tensión y deformación basada en promedios de los valores de los puntos de cuadratura.....	167
Figura 5.1.	Variación de las constantes mecánicas para compuestos de fibra de vidrio-epoxy (izquierda) y de boro-epoxy (derecha) [1].....	174
Figura 5.2.	Esquema del método de homogeneización [14].....	176
Figura 5.3.	Esquema de la transformación de tensiones y deformaciones del espacio real al ficticio [16].....	178
Figura 5.4.	Esquema de comportamientos paralelo y serie de un laminado bajo una acción. Comportamiento paralelo (figura izquierda) y comportamiento serie (figura derecha).....	179
Figura 5.5.	Diagrama de flujo de variables de entrada y salida de los modelos de degradación de fibra y matriz.....	189
Figura 5.6.	Diagrama de flujo del método de resolución serie-paralelo.....	199
Figura 6.1.	Relación entre los espacios de tensiones. Izquierda (espacio real), derecha (espacio no degradado). [25].....	210
Figura 6.2.	Curva tensión-deformación en un proceso de carga y descarga tras rebasar el umbral elástico y presencia de daño.....	212
Figura 6.3.	Relación tensión-deformación para un material con ablandamiento exponencial (izquierda) y ablandamiento lineal (derecha).....	218
Figura 6.4.	Evolución del parámetro de daño para los dos tipos de ablandamiento....	219
Figura 6.5.	Esquema de las dos mallas utilizadas. Malla fina (derecha) y malla gruesa (izquierda).....	220
Figura 6.6.	Curva fuerza total-desplazamiento (izquierda) y tensión-deformación (derecha).....	221
Figura 6.7.	Diagrama de flujo del modelo de daño.....	227
Figura 7.1.	Esquema general del modelo fenomenológico.....	236
Figura 7.2.	Malla y condiciones de contorno propuestas para el laminado sin agujero	242
Figura 7.3.	Detalle del mallado en el espesor.....	242
Figura 7.4.	Comparación de las curvas Tensión Remota-Deformación para laminados sin agujero con los resultados extraídos de [14].....	243
Figura 7.5.	Diferentes mallas utilizadas. De arriba a abajo: 9600 elementos, 19968 elementos, 28800 elementos y 44928 elementos.....	244



Figura 7.6.	Curvas Fuerza Total-Desplazamiento para el laminado con agujero y diferentes mallas.....	245
Figura 7.7.	Distribución del parámetro de daño en las inmediaciones del agujero para las distintas mallas: 9600 elementos (arriba izquierda), 19968 elementos (arriba derecha), 28800 elementos (abajo izquierda) y 44928 elementos (abajo derecha).....	246
Figura 7.8.	Curvas Tensión-Distancia al borde libre para diferentes mallas.....	247
Figura 7.9.	Comparación de las curvas tensión remota-deformación del laminado con los resultados extraídos de [14].....	248
Figura 7.10.	Tensiones de las primeras láminas (Laminado A).....	249
Figura 7.11.	Tensiones de las primeras láminas (Laminado B).....	251
Figura 7.12.	Distribución del parámetro de daño.....	252
Figura 7.13.	Situación de los elementos (en rojo) donde se estudian las componentes de tensión interlaminar a lo largo del espesor. Localización de los espesores (izquierda). Vista general (central). Detalle del borde extremo (derecha superior). Detalle del agujero (derecha inferior).....	253
Figura 7.14.	Tensión $\sigma_z$ a lo largo del espesor.....	254
Figura 7.15.	Tensión $\sigma_{xz}$ a lo largo del espesor.....	254
Figura 7.16.	Tensión $\sigma_{yz}$ a lo largo del espesor.....	255

*Índice de Tablas*

Tabla 3.1. Propiedades mecánicas del material utilizado en el análisis de sensibilidad de malla [19]..... 69

Tabla 3.2. Propiedades mecánicas del material IM7/MTM-45-1 [31]..... 89

Tabla 3.3. Laminados y secuencias de apilamiento estudiadas..... 93

Tabla 4.1. Puntos de cuadratura para las integrales de las matrices de rigidez elementales..... 165

Tabla 6.1. Propiedades del material para el ensayo de tracción ..... 217

Tabla 6.2. Valores de los parámetros del modelo de daño continuo usando la función umbral de daño de Simo-Ju..... 217

Tabla 7.1. Propiedades del T800/924C a tracción para diversas orientaciones de las fibras en láminas sin agujero [14]..... 240

Tabla 7.2. Propiedades de la fibra y la matriz en el modelo propuesto..... 243

## 1. Introducción



## 1.1. Motivación

En las últimas décadas, el uso de elementos estructurales fabricados con material compuesto se ha visto incrementado excepcionalmente en la industria. La naturaleza personalizable de los procesos de diseño de este tipo de materiales, a la hora de buscar determinadas propiedades que mejoren el comportamiento mecánico de los materiales tradicionales, es uno de los motivos principales de este incremento.

Las propiedades mecánicas de mayor interés en el diseño de materiales compuestos son la resistencia, la rigidez, la resistencia a la corrosión y a la abrasión, vida a fatiga y aislamiento acústico entre otras. Además, estos materiales resultan especialmente adecuados para el uso en estructuras donde el peso juega un papel fundamental debido a que son materiales que se caracterizan por su bajo peso.

Su utilización para la fabricación de estructuras en la industria aeronáutica está ampliamente extendida, considerándose a esta industria la precursora en el uso de este tipo de materiales donde el peso constituye la principal ventaja. Análogamente, en la industria naval existen un gran número de aplicaciones en donde el uso de materiales compuestos, aunque menos extendido, resulta muy ventajoso. Este hecho se debe fundamentalmente a que los materiales compuestos son de base no metálica y, por tanto, son muy resistentes a la corrosión. Por todos estos motivos, la aplicación de este tipo de materiales a otras industrias como la de la automoción, la ingeniería civil o el sector energético es ya una realidad y se prevé que siga experimentando un crecimiento exponencial en los próximos años.

Sin embargo, existen algunas dificultades que impiden que el uso de este tipo de materiales sea, todavía, más generalizado. La primera complicación se encuentra asociada a la complejidad constitutiva de los materiales compuestos. Estos materiales se encuentran constituidos por un componente base que conforma el material, combinado con un refuerzo constituido por fibras largas<sup>1</sup>. Además, el uso de estos materiales se realiza, en general, en forma de laminados que se conforman mediante el apilamiento de láminas que pueden tener las fibras orientadas según diferentes direcciones. El comportamiento de cada una de estas láminas depende de las propiedades de la fibra y la matriz y de cómo se combinan ambos constituyentes. Por este motivo, estimar las propiedades de las láminas es fundamental a la hora de predecir el comportamiento de estructuras fabricadas con este tipo de materiales.

Existen, en este sentido, dos visiones diferentes a la hora de establecer las propiedades de una lámina de material compuesto. Una de ellas, denominada *macromecánica*, consiste en considerar a las láminas como elementos homogéneos y ortótropos cuyas constantes mecánicas se determinan de forma directa mediante ensayos experimentales. A su vez, las características mecánicas del laminado se obtienen, tradicionalmente, a través de la llamada *Teoría General del Laminado* que permite obtener los esfuerzos internos a partir de las tensiones integradas en el espesor. Sin embargo, la Teoría del Laminado no tiene en cuenta las componentes de tensión que se encuentran fuera del plano del mismo. Estas

---

<sup>1</sup> Con el término 'larga' se hace referencia a que la fibra tiene una dimensión mucho más grande que las otras dos. Aunque existen materiales compuestos que pueden estar constituidos por fibras discontinuas o continuas, cortas y largas, nos centraremos, a partir de ahora, en materiales compuestos de fibra larga y continua orientada según direcciones determinadas.

componentes, llamadas *tensiones interlaminares*, suelen desarrollarse en las inmediaciones de los bordes libres y su efecto, a través de distintos mecanismos de fallo como la delaminación o la rotura transversal por cortadura, puede conllevar la degradación del laminado. El desarrollo de herramientas que permitan estimar las tensiones interlaminares es, por tanto, fundamental.

La otra visión consiste en tratar de determinar las propiedades de las láminas a partir de las características de los componentes y de la forma en la que estos se relacionan entre sí. Esta concepción es el objeto de estudio de la *micromecánica* que, a diferencia de la macromecánica, considera que el comportamiento mecánico de la lámina es consecuencia de la actuación combinada de la fibra y la matriz.

Ambas visiones resultan fundamentales a la hora de describir adecuadamente la complejidad de estos materiales que, a su vez, se pueden modelar con distintos grados de detalle. Una descripción de las visiones macromecánica y micromecánica de los materiales compuestos se puede encontrar en [1].

Existen diversas teorías constitutivas a nivel micromecánico. Una de las teorías más utilizadas es la llamada Teoría de Mezclas que permite modelar el comportamiento de los materiales a partir de los modelos constitutivos de los materiales simples [2]. En su vertiente clásica, esta teoría presupone que, en un punto material, las deformaciones de la fibra y la matriz son las mismas (comportamiento en paralelo). Esta suposición limita en gran medida las capacidades de modelado de esta teoría, que sólo es adecuada para simular el comportamiento mecánico de materiales cuyas componentes de deformación actúan en paralelo y sin desplazamientos relativos entre ellos. Ejemplo de esto son los materiales reforzados con fibras largas alineadas con la dirección de la carga. En esta línea, algunos autores han propuesto teorías de mezclas modificadas que superen las limitaciones inherentes a la teoría clásica ([3] y [4]). Éste último formula una teoría de mezclas generalizada que considera comportamientos intermedios en serie o en paralelo en las relaciones cinemáticas entre los componentes, pero presenta la limitación de tener que disponer de parámetros experimentales difíciles de determinar. Otra alternativa, dentro de este grupo de teorías, es la llamada Teoría de Mezclas Serie/Paralelo que, en su vertiente básica, prescinde del uso de parámetros experimentales e implica costes computacionales razonables.

Otro ejemplo de cómo modelar constitutivamente, desde un punto de vista micromecánico y fuera de los planteamientos serie/paralelo, se muestra en [5] donde se estudian fenómenos como el colapso de vacío, el endurecimiento, el micropandeo y la disipación termodinámica. Otros ejemplos de planteamientos micromecánicos se pueden encontrar en [6] donde se aplican al hormigón o en [7] donde se utilizan los principios micromecánicos, en el marco de la Mecánica de los Medios Continuos, para obtener las características macroscópicas de resistencia y rigidez.

Otra dificultad que impide el uso generalizado de materiales compuestos, está ligada al hecho de que el uso de estos materiales con fines estructurales conlleva usar piezas que estén conformadas por la unión de varias partes que necesitan contar con la presencia de agujeros, remaches y uniones. Dichos elementos introducen discontinuidades en el dominio, que producen efectos de concentración de tensiones, llevando aparejados mecanismos de fallo propios de este tipo de materiales.

El modo en que estos materiales pueden fallar varía en función de las condiciones de carga, secuencias de apilamiento, espesores y la presencia o no de agujeros. Esta variabilidad de comportamiento llega incluso a producir que determinados mecanismos de fallo aparezcan asociados a estados de carga concretos, produciendo que haya que utilizar modelos diferentes en función del estado de carga. Por ejemplo, en los problemas sometidos a cargas de tracción, el fallo viene gobernado fundamentalmente por la rotura de las fibras [8] mientras que el problema crece en dificultad si la carga es de compresión. En este caso, si se trata de un laminado sin agujero es suficiente con el criterio de la máxima deformación para predecir la rotura, sin embargo, en presencia de agujeros, aparecen fenómenos de micropandeo de las fibras en las inmediaciones de los mismos [9].

Este hecho ha llevado a que multitud de autores hayan estudiado el efecto de la presencia de agujeros en laminados con diferentes secuencias de apilamiento y diferentes estados de carga. Sin embargo, el problema está lejos de estar resuelto y por eso es importante disponer de modelos de daño que permitan modelar el micropandeo, en las inmediaciones de los bordes libres, cuando los laminados presentan agujeros en su configuración.

## 1.2. Objetivos

El **objetivo global** de esta Tesis Doctoral es el análisis del efecto de las tensiones en las inmediaciones del borde libre de un laminado de material compuesto, sometido a cargas en su plano. En particular, se quiere estudiar el efecto de las tensiones fuera del plano de aplicación de la carga en dos casos diferenciados. El primero de ellos consiste en el estudio de las tensiones interlaminares que se producen en el borde libre de un laminado intacto sometido a cargas de tracción uniaxial. En segundo lugar, se quiere estudiar las tensiones interlaminares afectadas por la concentración de tensiones, debida a la presencia de un agujero en el centro del laminado cuando se somete a cargas de compresión.

Para alcanzar el objetivo global, se proponen los siguientes **objetivos parciales**:

1. Analizar las tensiones interlaminares en el borde libre de un laminado intacto sometido a un estado de carga uniaxial de tracción. Para ello, se utiliza un modelo simplificado del problema que reduzca las ecuaciones de campo a un esquema de diferencias finitas que permita obtener las tensiones interlaminares de una forma relativamente simple.

Se proponen las siguientes **tareas específicas**:

- a) Formular adecuadamente las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y ley de comportamiento de un material ortótropo y deducir la forma funcional del campo de desplazamientos. Deducir las ecuaciones de campo y las condiciones de contorno.
- b) Definir fórmulas de aproximación para las derivadas que, sustituidas, permitan construir un esquema de diferencias finitas. Este sistema, una vez

resuelto, proporcionará los desplazamientos, las deformaciones y las tensiones en todo el dominio.

- c) Evaluar las tensiones interlaminares cerca del borde libre, identificando una variable que permita confirmar experimentalmente, de forma indirecta, la presencia de estas tensiones. Definir un ensayo experimental que permita determinar la variable identificada.
  - d) Utilizar los resultados experimentales empleando la variable anterior, además de resultados publicados por otros autores, para validar la herramienta desarrollada.
  - e) Estudiar, con la herramienta validada, la influencia de la orientación de la fibras y las secuencias de apilamiento en los valores de las tensiones interlaminares en los bordes libres.
2. Obtener el estado tenso-deformacional en el entorno del borde libre de un agujero practicado en un laminado de material compuesto, cuando se somete a cargas de compresión. Se propone utilizar la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo, en un soporte de elementos finitos, como ley constitutiva del material compuesto. Además, se implementa un esquema de daño continuo para modelar la zona afectada por el micropandeo de las fibras alineadas con la dirección de la carga.

Se plantean las siguientes **tareas específicas**:

- a) Definir adecuadamente un soporte de elementos finitos que, partiendo de los nodos de la malla y sus conectividades, permita construir las matrices de rigidez elementales y, a partir de éstas, la matriz de rigidez global de la estructura. Se utilizan elementos isoparamétricos hexaédricos y funciones de forma lineales.
- b) Proponer una ley constitutiva para el material compuesto utilizando la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo que permita modelar la ortotropía de cada lámina. Se considera comportamiento paralelo en la dirección de la fibra y comportamiento en serie en las direcciones perpendiculares. Además, se obtienen expresiones para la matriz de rigidez global de la estructura en términos de las matrices de rigidez de la fibra y la matriz. Los componentes son considerados como materiales isotrópicos.
- c) Proponer un modelo de daño continuo que permita identificar la región dañada con la zona afectada por el micropandeo de las fibras orientadas en la dirección de la carga de compresión. Se propone utilizar un modelo de



daño isótropo que utilice una única variable escalar para modelar el daño y una ley de ablandamiento para degradar las propiedades mecánicas.

- d) Validar el modelo comparando con resultados de la literatura, ajustando las propiedades de los materiales constituyentes y comprobando el resultado obtenido cuando se contrasta con los resultados experimentales aportados por otros autores.
- e) Utilizar el modelo validado para estudiar las tensiones en las inmediaciones del borde libre del agujero y evaluar el efecto del daño en el desarrollo de las mismas.

### 1.3. Estructura del trabajo

La estructura de esta Tesis Doctoral pretende dar al texto un carácter autocontenido y aunque se proporciona la fuente de procedencia de las ideas utilizadas en el desarrollo de las herramientas, se incluye una exposición de los conceptos necesarios para el desarrollo de las mismas, incluyendo descripciones detalladas cuando sea necesario.

El texto se estructura siguiendo un esquema de ocho capítulos. Cada uno de estos capítulos incluye una numeración propia para tablas, figuras y ecuaciones que antepone un índice correspondiente al número de capítulo donde se encuentre el elemento concreto. Debido al elevado número de expresiones que contienen algunos capítulos sólo aquellas que requieran, en un momento posterior, ser referenciadas o tengan una trascendencia especial, llevarán asignadas una numeración concreta.

En este trabajo, se han incluido los antecedentes correspondientes a cada unidad temática en su capítulo correspondiente, en vez de un único capítulo específico dedicado a tal fin. Por este motivo, cada capítulo incorpora, cuando sea necesario, un primer apartado de introducción donde se exponen los antecedentes de cada tema tratado y una relación de la bibliografía utilizada, al final de cada uno de los mismos.

Este **primer capítulo** está estructurado según un esquema de tres apartados. Primeramente, se expone de forma breve la problemática que aparece, ligada al uso de material compuesto en la industria. En segundo lugar, se expone el objetivo global de la tesis desglosándolo en objetivos parciales que se concretan según tareas específicas. En tercer lugar, se exponen los aspectos generales y la estructura que seguirá el presente documento haciendo una breve descripción del contenido de cada capítulo.

En el **segundo capítulo** se exponen las hipótesis y algunos conceptos que se manejarán a lo largo de todo el trabajo. Se hace una breve descripción de cada aspecto y se trata de exponer cuándo es justificable su uso y cuáles son sus limitaciones. Los aspectos concretos que se exponen son: el concepto de pequeñas deformaciones, la Teoría del Laminado y los conceptos de tensor secante y tensor tangente.

En el **tercer capítulo** se describe un modelo numérico basado en un esquema de diferencias finitas que permite obtener el valor de las tensiones interlaminares para laminados simétricos con cualquier secuencia de apilamiento. En primer lugar, se obtienen las ecuaciones de campo en conjunto con sus condiciones de contorno. Seguidamente, se describen las fórmulas de aproximación para las derivadas primeras y segundas, que sustituidas en las ecuaciones de campo y condiciones de contorno permiten obtener el esquema de diferencias finitas en el que se basa la herramienta que se ha desarrollado. La solución de este esquema permitirá obtener las tensiones interlaminares.

En segundo lugar, se realiza un análisis de la solución cuando se varía la cantidad de puntos que constituye la malla; mientras que la validación del modelo se realiza comparando los resultados obtenidos con otros publicados en la literatura, por diferentes autores, siguiendo métodos diferentes. Además, se comparan los valores del campo de desplazamiento longitudinal que se obtiene con la herramienta, con los se observan para el mismo laminado en un ensayo realizado en el laboratorio. Este proceso se realiza para diferentes orientaciones de las fibras.

Finalmente, se utiliza la herramienta desarrollada para predecir las tensiones interlaminares en la zona del borde libre a la altura de la interfase, para diferentes secuencias de apilamiento y diferentes orientaciones de las fibras. Este estudio permite predecir qué mecanismo de fallo será el que preferentemente aparezca.

En el **cuarto capítulo**, se hace una descripción pormenorizada de todos los aspectos necesarios para la implementación de un método que permita obtener el estado de tensiones y deformaciones de un sólido sometido a un sistema de cargas y unas condiciones de contorno cualesquiera. Las rutinas que se desarrollan basan su estrategia de cálculo en el Método de los Elementos Finitos. Dado que el interés principal recae en resolver problemas no lineales, se describirá una forma del Método de Newton-Raphson que permitirá iterar para resolver el problema.

Esta no linealidad vendrá propiciada por el uso de dos modelos de daño isótropo independientes para la fibra y la matriz que caracterizan al material compuesto a través de una ley constitutiva proporcionada por la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo y que se describen en capítulos posteriores.

Asimismo, en este capítulo, se hace una disquisición de algunos aspectos termodinámicos que es necesario tener en cuenta, se especifican las funciones de forma y el tipo de elementos que se emplearán, la forma matricial de los operadores necesarios y se expone la regla de cuadratura que se utilizará para realizar la integración de los dominios locales. Por último, se expone un esquema que muestra el funcionamiento del método.

La descripción del soporte teórico que permitirá construir las propiedades del material compuesto a partir de las propiedades de los constituyentes se expondrá en el **quinto capítulo**. El soporte teórico vendrá constituido por la llamada Teoría de Mezclas Serie/Paralelo y permitirá obtener la evolución tensión-deformación de la fibra y la matriz por separado cuando están sufren procesos de degradación independientes.

La teoría asume comportamiento en paralelo en la dirección donde se encuentra alojada la fibra (relaciones de isodeformación) mientras que para las direcciones perpendiculares se

supondrá comportamiento en serie (relaciones de isotensión). Este planteamiento permite introducir el carácter de ortotropía propio de los materiales compuestos a partir de la consideración de dos materiales isótropos, cambiando las propiedades según la orientación de la fibra. También se describe el proceso iterativo de cálculo que permite despejar las deformaciones en serie en función de las deformaciones en paralelo y la composición del estado de tensiones posterior. Por último, se expone un esquema que muestra el funcionamiento del método.

Para describir apropiadamente el estado de degradación de los componentes es necesario proponer algún modelo que introduzca un carácter no lineal en el esquema de resolución. En este trabajo, se utilizará un modelo basado en la Mecánica del Daño Continuo para la fibra y la matriz y será un modelo de daño continuo isótropo. Dicho modelo vendrá caracterizado por una función umbral, un parámetro de daño y dos leyes de evolución diferentes. Todos estos aspectos se describen en el **sexto capítulo**.

Además, también se describe cómo se relaciona el modelo de daño con la Mecánica de la Fractura, a través de la conexión de la densidad de energía disipada con la tenacidad a fractura del material. Se muestra, mediante un ejemplo, en qué condiciones se produce la independencia de las magnitudes globales de la malla de elementos finitos utilizada para el análisis. Por último, se expone un esquema que muestra el funcionamiento del método.

En el **séptimo capítulo** se propone aplicar la herramienta desarrollada para estudiar el problema de un laminado con agujero sometido a cargas de compresión. En primer lugar, se expone un esquema que muestra cómo se interrelacionan las variables de los diversos métodos descritos en los capítulos anteriores. A continuación, se expone el proceso que se ha seguido para ajustar las propiedades de la fibra y la matriz, así como los parámetros del modelo de daño a partir de los resultados publicados para un laminado unidireccional ensayado a compresión. Una vez que dichas propiedades se han ajustado, el modelo se valida comparando los resultados que se obtienen para un laminado multidireccional intacto y otro con agujero. Se proponen diversas mallas y se estudia la independencia de los resultados con el número de elementos finitos. Con el modelo validado, finalmente, se estudia la evolución de las tensiones interlaminares a lo largo del espesor del borde libre extremo y en las inmediaciones del agujero, así como el efecto que el modelo de daño produce en su evolución. Este estudio se realiza para dos secuencias de apilamiento diferentes.

Finalmente, en el **octavo capítulo** se muestran las conclusiones que se extraen del estudio realizado en los capítulos anteriores y se señalan las líneas futuras que permitirán completar y ampliar el trabajo desarrollado en esta tesis. Asimismo, se expone la difusión de los resultados derivados.

## Bibliografía

- [1] Jones, R. M., *Mechanics in composite materials*, 1999.
- [2] Trusdell, C. & Toupin, R., *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik III/I edition, Berlín, Germany: Springer Verlag, 1960.
- [3] Ortiz, M. & Popov, E., «Plain concrete as a composite material,» *Mechanics of Materials*, nº 1, pp. 139-150, 1982.
- [4] Oller, S., *Simulación Numérica del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos*, Barcelona, Spain: CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería), 2003.
- [5] Budiansky, B., «Micromechanics,» *Computers & Structures*, vol. 16, nº 1-4, pp. 3-12, 1983.
- [6] Ortiz, M. & Popov, E., «A physical model for the inelasticity of concrete,» *Proceedings of Royal Society of London*, vol. Series A, nº 383, pp. 101-125, 1957.
- [7] Green, A. & Naghdi, P., «A dynamical theory of interacting continua,» *Journal of Engineering Science*, nº 3, pp. 231-241, 1965.
- [8] Rosen, B. W., «The Tensile Failure of Fibrous Composites,» *AIAA Journal*, vol. 2, nº 11, pp. 1885-1911, 1964.
- [9] Soutis, C.; Curtis, P. T. & Fleck N.A., «Compressive failure of notched carbon fibre composites,» *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. 440, nº 1909, pp. 241-256, 1993.

## 2. Aspectos Preliminares



## 2.1. Introducción

Dada la complejidad de los fenómenos que se estudian en este trabajo, se hace necesario partir de determinadas hipótesis que permitan simplificar los problemas a analizar, así como fijar determinadas definiciones que se manejan de forma habitual en los capítulos siguientes.

La exposición de las hipótesis que se hace en este capítulo permitirá establecer cuáles son las premisas necesarias y el marco de aplicación de las mismas. En los apartados siguientes se expone respectivamente:

- El concepto de **pequeñas deformaciones**. Dicha consideración permite establecer la igualdad de los tensores de deformaciones en la situación deformada con respecto a la indeformada, permitiendo definir un único tensor de pequeñas deformaciones. También establece que derivar respecto de las variables de posición en la configuración deformada es equivalente a derivar respecto de las coordenadas espaciales en la configuración indeformada. El concepto de pequeñas deformaciones se maneja a lo largo de todo el trabajo, aunque un uso explícito de las relaciones entre los desplazamientos y las deformaciones en dicho régimen se hace en el presente capítulo. Además, se usan en los Capítulos 3 y 4.
- Los aspectos de la **Teoría del Laminado**. Los aspectos que se muestran aquí se utilizarán como punto de partida para estudiar el estado tensional de un laminado intacto constituido por láminas cuyas fibras tienen diferentes orientaciones. Las limitaciones que presenta la Teoría del Laminado motivan el desarrollo de una herramienta numérica (en el Capítulo 3) que permite obtener las tensiones en la dirección del espesor que, en dicha teoría, son despreciadas.
- Los conceptos de **tensor secante** y **tensor tangente** alrededor del estado de deformación actual. Dichos tensores permitirán acercarse al estado actual de tensión de un punto desde la posición de un estado conocido próximo. El concepto de tensor secante se maneja en el Capítulo 6 mientras que el tensor tangente se utilizará en los Capítulos 4, 5 y 6.

## 2.2. Campo de deformaciones de un medio continuo. Pequeñas deformaciones

El planteamiento en tensiones y deformaciones que permite describir el comportamiento mecánico de un material, parte del hecho de que el sólido bajo estudio es deformable y como tal, tiene sentido considerar un estado indeformado, antes de la aplicación de las cargas, y uno deformado donde la configuración geométrica de los puntos materiales del sólido se haya visto modificada.

El movimiento de los puntos del sólido tenderá a variar las posiciones relativas de los puntos del sólido, de forma que la distancia entre los mismos variará a lo largo del movimiento. Esto se contrapone al movimiento de un sólido rígido que precisamente se caracteriza por garantizar la constancia de las distancias relativas entre los puntos del sólido. Además, el movimiento como sólido rígido siempre se puede descomponer en una traslación más una rotación.

A lo largo de este trabajo se asumen pequeñas deformaciones en todos los planteamientos que se hacen. Dado que esta asunción, que no deja de ser una hipótesis de trabajo, puede ser no válida en determinadas aplicaciones, conviene conocer en detalle cuáles son las implicaciones que tiene.

Algunas descripciones más detalladas se pueden encontrar en [1], [2] o [3]. Las configuraciones indeformadas y deformadas vienen expresadas en sendos sistemas de ejes. Las coordenadas del sólido indeformado estarán expresadas en el primer sistema de ejes ( $X_1, X_2, X_3$ ) mientras que las del deformado estarán en los ejes ( $x_1, x_2, x_3$ ). La situación se muestra en la Figura 2.1 donde se ha representado el sólido en dos instantes de tiempo  $t_0$  y  $t$ , entre los cuales se ha producido la deformación que se estudia. Los sistemas de ejes, inicial y final, que en aras de la simplicidad se han representado coincidentes siendo ambos cartesianos rectangulares, no tienen ni por qué ser cartesianos ni tampoco iguales entre sí.

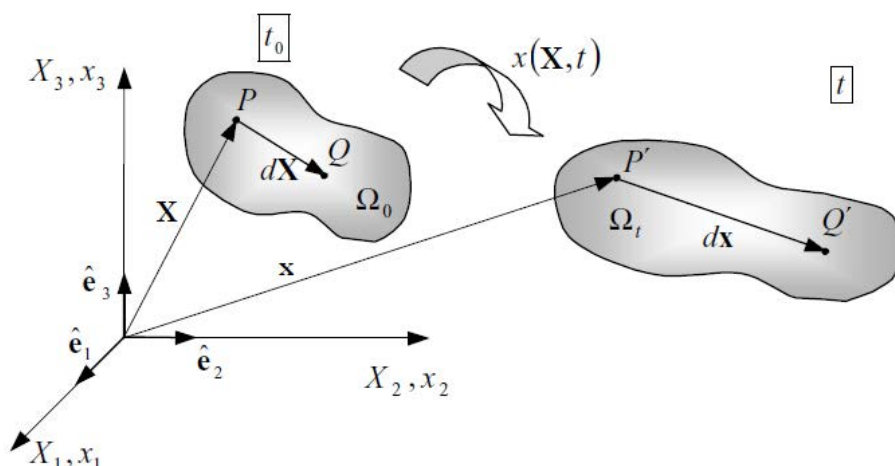


Figura 2.1. Sistemas de referencia. Configuración indeformada ( $X_1, X_2, X_3$ ) y deformada ( $x_1, x_2, x_3$ ) [1]



El hecho de que el medio deba permanecer continuo tras la deformación impone condiciones a la transformación. De esta manera, la función que represente la transformación:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\x_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t)\end{aligned}\tag{2-1}$$

Deberá ser continua y unievaluada para evitar que dos puntos diferentes se transformen en el mismo y, por lo tanto, deberá tener inversa:

$$\begin{aligned}X_1 &= X_1(x_1, x_2, x_3, t) \\X_2 &= X_2(x_1, x_2, x_3, t) \\X_3 &= X_3(x_1, x_2, x_3, t)\end{aligned}\tag{2-2}$$

Es evidente que según (2-1), la transformación, a primer orden, de un vector  $d\mathbf{X}$  que une dos puntos materiales de la configuración indeformada en otro vector  $d\mathbf{x}$  que une los dos mismos puntos en la configuración deformada, será:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} = F(t) d\mathbf{X}\tag{2-3}$$

Donde  $F$  es el gradiente material de la deformación. El determinante de  $F$  debe ser distinto de cero para que la transformación tenga inversa en todos los puntos de dominio.

La transformación que se ha definido entre las configuraciones indeformadas y deformadas viene caracterizada fundamentalmente por dos cantidades. La primera de ellas es la diferencia entre los cuadrados de los módulos de un vector  $d\mathbf{X}$  y su transformado  $d\mathbf{x}$  que, utilizando (2-3), se puede escribir de dos maneras posibles<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}dx^2 - dX^2 &= d\mathbf{X}^T (F(t)^T F(t) - I) d\mathbf{X} \\dx^2 - dX^2 &= d\mathbf{x}^T (I - F(t)^{-1T} F(t)^{-1}) d\mathbf{x}\end{aligned}\tag{2-4}$$

<sup>1</sup> Donde  $I$  representa el tensor unidad.

Definiendo los tensores simétricos  $E$  y  $e$ , conocidos como tensores de Green-Lagrange y tensor de deformación de Cauchy-Almansi respectivamente<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (F(t)^T F(t) - I) = E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \\ e &= \frac{1}{2} (I - (F(t) F(t)^T)^{-1}) = e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (2-5)$$

Se tiene, sustituyendo de vuelta en (2-4):

$$\begin{aligned} dx^2 - dX^2 &= d\mathbf{X}^T 2E d\mathbf{X} \\ dx^2 - dX^2 &= d\mathbf{x}^T 2e d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2-6)$$

El significado físico de (2-6) indica la diferencia entre el cuadrado del módulo del vector que separaba dos puntos materiales en la configuración indeformada, y el módulo de este mismo vector, que en la configuración deformada vuelve a separar los mismos puntos. Dichos puntos, tras la transformación, habrán cambiado sus posiciones relativas y, por tanto, la distancia que los separaba también se habrá modificado.

El hecho de que los puntos que se estudian representen el origen y el destino del vector antes y después de la transformación, no significa que todos los puntos materiales que estaban entre ellos sigan estando en el vector transformado. Esto último dependerá de la naturaleza de la transformación que se emplee.

Adicionalmente, se puede decir que la única diferencia entre las dos versiones de (2-6) es que la primera está formulada en función de las coordenadas de la situación indeformada o coordenadas lagrangianas mientras que la segunda está formulada en función de las coordenadas de la situación deformada o coordenadas eulerianas.

Tradicionalmente, los miembros izquierdos de (2-6) se miden según una magnitud adimensional que se conoce como la *dilatación unitaria*  $\varepsilon$ , definida como:

$$\varepsilon = \left( \frac{dx}{dX} \right) = \left( \frac{dx}{dX} \right) - 1 \quad (2-7)$$

Despejando de la primera de (2-6) y sustituyendo (2-7), se tiene que:

$$\left( \left( \frac{dx}{dX} \right)^2 - 1 \right) dX^2 = ((\varepsilon + 1)^2 - 1) dX^2 = d\mathbf{X}^T 2E d\mathbf{X} \quad (2-8)$$

<sup>2</sup> Se proporcionan tanto la notación matricial como la notación indicial de los tensores. En notación indicial y salvo que se especifique lo contrario, el índice repetido en un monomio indica suma (notación de Einstein).

La segunda magnitud que define la transformación dada en (2-3) es el ángulo  $\alpha$  que forman dos vectores,  $d\mathbf{x}$  y  $d\mathbf{y}$ , cualesquiera en la configuración deformada. El coseno del ángulo que forman se calcula a partir de la definición del producto escalar, utilizando (2-3):

$$\cos \alpha = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}}{dx dy} = \frac{d\mathbf{X}^T F(t)^T F(t) d\mathbf{Y}}{\sqrt{d\mathbf{X}^T F(t)^T F(t) d\mathbf{X}} \sqrt{d\mathbf{Y}^T F(t)^T F(t) d\mathbf{Y}}} \quad (2-9)$$

Normalmente, se suele definir el ángulo de cizalla mediante el cambio  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$  y, a su vez utilizando la primera ecuación de (2-5), se puede reescribir lo anterior:

$$\sin \gamma = \frac{d\mathbf{X}^T (2E + I) d\mathbf{Y}}{\sqrt{d\mathbf{X}^T (2E + I) d\mathbf{X}} \sqrt{d\mathbf{Y}^T (2E + I) d\mathbf{Y}}} \quad (2-10)$$

Las magnitudes expresadas en (2-8) y (2-10) se podrían haber expresado alternativamente en términos de las coordenadas en el sistema deformado. Evidentemente, las magnitudes que se han definido hasta ahora se pueden poner en términos de los desplazamientos de los puntos del dominio. Dichos desplazamientos  $u$  se definen como:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

Introduciendo (2-11) en las definiciones del gradiente material de la deformación (2-3), se tiene que:

$$F(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U(t) + I \quad (2-12)$$

Donde  $U(t)$  representa el gradiente del campo de desplazamiento. Introduciendo la descomposición (2-12) en la primera de las definiciones de los tensores de deformación (2-5) se tiene que:

$$E = \frac{1}{2} (F(t)^T F(t) - I) = \frac{1}{2} (U(t)^T U(t) + U(t) + U(t)^T) \quad (2-13)$$

Que si la sustituimos en (2-8) y en (2-10), se tendrá que:

$$\begin{aligned}
 ((\varepsilon + 1)^2 - 1)dX^2 &= d\mathbf{X}^T(U(t)^T U(t) + U(t) + U(t)^T) d\mathbf{X} \\
 \text{sen } \gamma &= \frac{d\mathbf{X}^T(U(t)^T U(t) + U(t) + U(t)^T + I)d\mathbf{Y}}{\sqrt{d\mathbf{X}^T(U(t)^T U(t) + U(t) + U(t)^T + I)d\mathbf{X}} \sqrt{d\mathbf{Y}^T(U(t)^T U(t) + U(t) + U(t)^T + I)d\mathbf{Y}}}
 \end{aligned} \tag{2-14}$$

La primera de las expresiones (2-14) gobierna el cambio de longitud entre dos puntos que en la configuración indeformada estaban unidos por el vector  $d\mathbf{X}$ , mientras que la segunda de ellas gobierna el ángulo que formarán, en la configuración deformada, dos vectores que en la indeformada eran  $d\mathbf{X}$  y  $d\mathbf{Y}$ . Estas transformaciones podrían haber sido escritas en términos de las coordenadas de la configuración deformada de forma análoga.

Cualquier transformación de cambio de longitud y cizalladura general se puede descomponer como suma de una serie de transformaciones que, en un problema escrito en ejes cartesianos, se pueden ir describiendo particularizando las expresiones (2-14) para los vectores de la base.

De las nueve componentes que en principio tiene un tensor de segundo orden como el  $E$ , sólo seis de ellas son independientes gracias a que éste es simétrico. Este hecho se sigue directamente de su definición en la primera expresión de (2-5). Así, particularizando la primera de las expresiones (2-14) para los vectores de la base  $d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $d\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $d\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y teniendo en cuenta que  $dX^2 = dY^2 = dZ^2 = 1$ :

$$\begin{aligned}
 ((\varepsilon_1 + 1)^2 - 1) &= \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \\
 ((\varepsilon_2 + 1)^2 - 1) &= \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \\
 ((\varepsilon_3 + 1)^2 - 1) &= \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)
 \end{aligned} \tag{2-15}$$

Donde se ha tenido en cuenta que, por ejemplo, para el primer vector coordenado  $d\mathbf{X}^T(U(t)^T U(t) + U(t) + U(t)^T) d\mathbf{X}$  representa la componente '11' del tensor dado por  $U(t)^T U(t) + U(t) + U(t)^T$ . Finalmente despejando de (2-15):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \sqrt{\left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)} + 1 - 1 \\
 \varepsilon_2 &= \sqrt{\left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)} + 1 - 1
 \end{aligned} \tag{2-16}$$

$$\varepsilon_3 = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)^2 + 2\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) + 1} - 1$$

Sustituyendo de forma análoga en la segunda de (2-14):

$$\begin{aligned} \text{sen } \gamma_{23} &= \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)}{\left(\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)^2 + 2\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)^2 + 2\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) + 1\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \text{sen } \gamma_{13} &= \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)}{\left(\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2 + 2\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)^2 + 2\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) + 1\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2-17) \\ \text{sen } \gamma_{12} &= \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)}{\left(\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2 + 2\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)^2 + 2\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + 1\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Donde se ha tenido en cuenta que, por ejemplo, para el primer y segundo vector coordenado,  $d\mathbf{X}^T(U(t)^T U(t) + U(t) + U(t)^T + I)d\mathbf{Y}$  representa la componente '12' del tensor dado por  $U(t)^T U(t) + U(t) + U(t)^T + I$ . Finalmente teniendo en cuenta (2-15) se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{sen } \gamma_{23} &= \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)}{(\varepsilon_2 + 1)(\varepsilon_3 + 1)} \\ \text{sen } \gamma_{13} &= \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)}{(\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_3 + 1)} \quad (2-18) \\ \text{sen } \gamma_{12} &= \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)}{(\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_2 + 1)} \end{aligned}$$

Las componentes dadas en (2-16) y (2-18) representan las componentes de dilatación unitaria y cizalladura cuando la transformación se realiza en las coordenadas del sistema indeformado. Dichas expresiones pueden encontrarse también en [4]. Resulta inmediato comprobar que cuando se sustituyen vectores que cumplan que  $d\mathbf{X} = d\mathbf{Y}$  en la segunda de (2-14), se tiene que la cizalladura cumple que  $\text{sen } \gamma = 1 \rightarrow \alpha = 0$ , que indica que la cizalla entre un vector transformado y él mismo es, evidentemente, nula.

## Pequeñas deformaciones

Es en este punto donde conviene hacer la consideración que permitirá manejar un razonamiento en pequeñas deformaciones. Dicha consideración consiste en:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1 \quad (2-19)$$

Que básicamente se puede resumir en decir que sólo se conservarán las variaciones de primer orden cuando se comparan con términos en donde aparezcan productos de estas variaciones. A su vez, las variaciones de primer orden serán despreciables cuando se comparen con términos de orden unidad. Esta serie de consideraciones implicarán algunas simplificaciones en las expresiones que se han expuesto hasta ahora. En primer lugar, los tensores de deformaciones, dados en términos del vector de desplazamiento, se obtienen sustituyendo en (2-5) las expresiones (2-11):

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{ik} \delta_{kj} + \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} + \delta_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \delta_{ik} \delta_{kj} + \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

Si aplicamos la condición (2-19) a las expresiones anteriores  $\left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \ll \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ , se tiene que:

$$E_{ij} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

$$e_{ij} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

La única diferencia entre los tensores  $E_{ij}$  y  $e_{ij}$  simplificados consiste en que cada tensor se calcula a partir de las derivadas de los desplazamientos con respecto a las coordenadas en el sistema indeformado y deformado respectivamente. Sin embargo, se puede probar que ambas derivadas son equiparables en el mismo orden de aproximación. Para ello usando (2-11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial X_k}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \delta_{kj} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &\approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2-20)$$

La implicación directa del aspecto que se acaba de exponer es que:

$$E_{ij} \approx e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-21)$$

Donde  $\varepsilon_{ij}$  es el conocido tensor de *pequeñas deformaciones* que, en este orden de aproximación, coincide con los tensores de deformaciones de Green-Lagrange y de Cauchy-Almansi. Aplicando las consideraciones (2-19) y (2-20) a las componentes de deformación unitaria normales y de cizalladura, (2-16) y (2-18), se tiene que<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{\left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)} + 1 - 1 \approx \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{\left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)} + 1 - 1 \approx \frac{\partial u_2}{\partial X_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_3 &= \sqrt{\left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)} + 1 - 1 \approx \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \text{sen } \gamma_{23} &= \frac{\left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)}{(\varepsilon_2 + 1)(\varepsilon_3 + 1)} \approx \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \text{sen } \gamma_{13} &= \frac{\left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)}{(\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_3 + 1)} \approx \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \text{sen } \gamma_{12} &= \frac{\left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)}{(\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_2 + 1)} \approx \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (2-22)$$

De esta manera, se puede ver que las componentes dadas en (2-22) son iguales a las componentes del tensor de pequeñas deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  siempre que consideremos que  $2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij}$ .

<sup>3</sup> Para hacer las simplificaciones pertinentes se ha tenido en cuenta que en pequeñas deformaciones ( $\varepsilon, \gamma \ll 1$ ), se tiene que  $\text{sen } \gamma \approx \gamma$  y que  $\sqrt{1 + 2\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$ , además de  $\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \ll \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .

En resumen, podemos decir que las hipótesis (2-19) han permitido despreciar los productos de las variaciones de los desplazamientos frente a las variaciones mismas y éstas, a su vez, frente a los términos de orden unidad. Asimismo, la definición de las componentes de  $\varepsilon_{ij}$ , en régimen de pequeñas deformaciones, representarán las dilataciones unitarias normales y las cizallas en la dirección de los vectores de la base. De esta manera, todo quedará reducido al conocimiento de las seis cantidades independientes del tensor  $\varepsilon_{ij}$ , dadas por (2-22), para cada punto del dominio.

Con todo, la consecuencia más importante que permite extraer la consideración de pequeñas deformaciones es que las deformaciones, calculadas como las derivadas de los desplazamientos (2-22), se obtienen derivando respecto de las coordenadas del sistema indeformado o deformado indiferentemente. Otra forma de ver esto consiste en considerar que todas las magnitudes de relevancia (deformaciones, tensiones y desplazamientos) no cambian al pasar de la situación indeformada a la deformada. Por tanto, para determinar las deformaciones (y por ende también las tensiones a través de la ley de comportamiento) basta con derivar los desplazamientos respecto de las coordenadas en la situación indeformada.

En caso contrario (grandes deformaciones) habrá que disponer de tensores (que serán de cuarto orden) que permitan describir el transporte de las tensiones cuando el sólido bajo estudio se deforma. Una descripción de las transformaciones necesarias para las tensiones puede encontrarse en [3].

## 2.3. Teoría del Laminado

Debido a que los laminados de material compuesto constituyen el principal foco de interés en este trabajo, conviene describir los aspectos de la llamada *Teoría del Laminado*, así como exponer sus principales limitaciones. Descripciones sobre dicha teoría se pueden encontrar en multitud de referencias ([5], [6] o [7]) aunque en la descripción que sigue se opta por la línea de exposición mostrada en [8].

La Teoría del Laminado está formulada bajo hipótesis de tensión plana y permite encontrar la relación entre los esfuerzos y las deformaciones, partiendo de las hipótesis generales de placas delgadas (hipótesis de Kirchhoff). Esta teoría asume que, en una lámina  $k$ , una línea perpendicular a la superficie media permanece perpendicular a la superficie media deformada, sin acortarse ni alargarse. Además, se supone una adhesión perfecta entre las láminas que configuran el laminado por lo que el campo de desplazamientos será continuo. Bajo estas consideraciones, dicho campo adquiere la forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_o(x, y) - z\beta_x \\ v(x, y, z) &= v_o(x, y) - z\beta_y \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y) \end{aligned} \tag{2-23}$$

Donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  representan las componentes del campo de desplazamientos en cualquier punto de la lámina,  $u_o$ ,  $v_o$  y  $w_o$  representan los desplazamientos del plano medio y  $\beta_{x,y}$



representan los ángulos de curvatura en las direcciones 'x' e 'y' respectivamente. Asimismo 'z' es la coordenada en la dirección del espesor. Además, se asume que en la teoría de placas delgadas:

$$\begin{aligned}\beta_x &= \frac{\partial w_o}{\partial x} \\ \beta_y &= \frac{\partial w_o}{\partial y}\end{aligned}\quad (2-24)$$

Introduciendo (2-24) en (2-23) y ésta a su vez en las relaciones (2-22) en pequeñas deformaciones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} = \varepsilon_x^o + z k_x^o \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} = \varepsilon_y^o + z k_y^o \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^o + z k_{xy}^o\end{aligned}\quad (2-25)$$

Donde  $\varepsilon_x^o$ ,  $\varepsilon_y^o$  y  $\gamma_{xy}^o$  representan las deformaciones de la superficie media del laminado y  $k_x^o$ ,  $k_y^o$  y  $k_{xy}^o$  son las curvaturas de las láminas<sup>4</sup>. En estas condiciones, la ley de comportamiento de una lámina  $k$  de material compuesto bajo hipótesis de tensión plana se escribe<sup>5</sup>:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{13} \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{23} \\ \overline{C}_{13} & \overline{C}_{23} & \overline{C}_{33} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{13} \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{23} \\ \overline{C}_{13} & \overline{C}_{23} & \overline{C}_{33} \end{bmatrix}^k \left[ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{bmatrix} \right]\quad (2-26)$$

A partir de (2-26), el vector de esfuerzos normales y flectores (por unidad de profundidad) se calcula para un laminado de  $N$  láminas, integrando en el espesor del laminado  $h$ , las tensiones dadas en (2-26):

<sup>4</sup>Donde se han definido las deformaciones de la línea media  $\varepsilon_x^o = \frac{\partial u_o}{\partial x}$ ,  $\varepsilon_y^o = \frac{\partial v_o}{\partial y}$  y  $\gamma_{xy}^o = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x}$  y las curvaturas también de la línea media  $k_x^o = -\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}$ ,  $k_y^o = -\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}$  y  $k_{xy}^o = -2\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y}$ .

<sup>5</sup> La ley de comportamiento de una lámina de material ortótropo no es un tensor lleno en ejes principales. Sin embargo, debido a que está expresada en ejes cualesquiera, presenta un estado de aparente anisotropía. Por este motivo, el tensor se considera lleno.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^k dz \quad (2-27)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^k z dz$$

Sustituyendo (2-26):

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{C_{11}} & \overline{C_{12}} & \overline{C_{13}} \\ \overline{C_{12}} & \overline{C_{22}} & \overline{C_{23}} \\ \overline{C_{13}} & \overline{C_{23}} & \overline{C_{33}} \end{bmatrix}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{bmatrix} \right] dz \quad (2-28)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{C_{11}} & \overline{C_{12}} & \overline{C_{13}} \\ \overline{C_{12}} & \overline{C_{22}} & \overline{C_{23}} \\ \overline{C_{13}} & \overline{C_{23}} & \overline{C_{33}} \end{bmatrix}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[ z \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z^2 \begin{bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{bmatrix} \right] dz$$

Y, tras realizar las integraciones, se pueden definir las siguientes matrices<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{C_{11}} & \overline{C_{12}} & \overline{C_{13}} \\ \overline{C_{12}} & \overline{C_{22}} & \overline{C_{23}} \\ \overline{C_{13}} & \overline{C_{23}} & \overline{C_{33}} \end{bmatrix}^k (z_k - z_{k-1}) \\ B &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{C_{11}} & \overline{C_{12}} & \overline{C_{13}} \\ \overline{C_{12}} & \overline{C_{22}} & \overline{C_{23}} \\ \overline{C_{13}} & \overline{C_{23}} & \overline{C_{33}} \end{bmatrix}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ C &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \overline{C_{11}} & \overline{C_{12}} & \overline{C_{13}} \\ \overline{C_{12}} & \overline{C_{22}} & \overline{C_{23}} \\ \overline{C_{13}} & \overline{C_{23}} & \overline{C_{33}} \end{bmatrix}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2-29)$$

Que permiten escribir finalmente:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{bmatrix}$$

<sup>6</sup> Las integraciones resultan inmediatas debido a que tanto las deformaciones como las curvaturas son magnitudes correspondientes a la superficie media y, por tanto, no dependen de 'z'.

A la vista de la forma que tienen las expresiones (2-30), es fácil ver que cuando la secuencia de apilamiento del laminado es simétrica respecto del plano 'xy', la matriz  $B$  será nula. Este hecho permite desacoplar el problema de los esfuerzos normales y las deformaciones del plano medio del problema de los flectores y las curvaturas de dicho plano medio.

Suponiendo entonces un laminado con secuencia de apilamiento simétrica, sometido a un esfuerzo de tracción (por unidad de profundidad)  $N$  en la dirección 'x', se puede escribir el siguiente sistema del tipo mostrado en (2-30):

$$\begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x^o \\ k_y^o \\ k_{xy}^o \end{bmatrix}$$

Lo que permite despejar:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que multiplicando por la ley de comportamiento de una lámina  $k$  teniendo en cuenta (2-25), se tendrá:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{13} \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{23} \\ \overline{C}_{13} & \overline{C}_{23} & \overline{C}_{33} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{13} \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{23} \\ \overline{C}_{13} & \overline{C}_{23} & \overline{C}_{33} \end{bmatrix}^k A^{-1} \begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que provee, en general, valores no nulos para el cortante  $\sigma_{xy}$  en la cara donde se aplica la carga:

$$[\sigma_{xy}]^k = [\overline{C}_{13} \quad \overline{C}_{23} \quad \overline{C}_{33}]^k A^{-1} \begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Sin embargo, este cortante implica por equilibrio, otro cortante  $\sigma_{xy}$  igual y de signo contrario en los bordes donde no hay carga aplicada, no pudiendo verificar la condición de contorno de borde libre de tensiones.

Así, la Teoría del Laminado permite obtener unas relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones (relaciones (2-30)) en un laminado de material compuesto. Esta teoría que resulta sencilla de implementar presenta, sin embargo, una serie de limitaciones que se resumen a continuación:

- Las fórmulas (2-29) proporcionan las mismas matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  para laminados que, estando compuestos por el mismo conjunto de láminas, éstas se encuentran apiladas según secuencias de apilamiento diferentes. Esto implica que la Teoría del Laminado no permite estudiar diferentes secuencias de apilamiento.
- La Teoría del Laminado predice valores no nulos de la tensión cortante  $\sigma_{xy}$  en los bordes libres del mismo. Este resultado contradice el hecho de que, por condición de contorno, las tensiones en dirección 'y' deben ser nulas.
- La Teoría del Laminado, al estar formulada en tensión plana, no tiene en cuenta la presencia de las tensiones en la dirección del espesor  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{zz}$  y  $\sigma_{yz}$ . Estas tensiones, llamadas interlaminares, resultan fundamentales para poder estudiar efectos como la delaminación; este efecto no puede ser estudiado, por tanto, con esta teoría. Además, las tensiones interlaminares equilibran las tensiones de cortadura  $\sigma_{xy}$  en el plano, cerca de las inmediaciones del borde libre, permitiendo verificar la condición de contorno.

Las tensiones interlaminares que aparecen cuando se somete un laminado simétrico a un estado uniaxial de tensión, se estudian en el siguiente capítulo de este trabajo. Para ello, se utiliza un método alternativo a la Teoría del Laminado que permite considerar el carácter tridimensional del problema.

## 2.4. Tensores secante y tangente

El comportamiento mecánico de un material viene regido, en general, por una ley constitutiva que relacione tensiones con deformaciones. La enorme complejidad que tiene formular, para un material concreto, una ley que reúna estas características para todos los regímenes de comportamiento es, en la práctica, imposible.

Por este motivo, la formulación de leyes aproximadas que reproduzcan, aunque sean tramos aislados, resultan imprescindibles. Es en este contexto donde cobran especial importancia los llamados tensores secante y tangente que se definirán a continuación. Una descripción más detallada de los aspectos que se exponen en este apartado puede encontrarse en [9] o en [10].

La curva tensión-deformación, ante la presencia de daño, correspondiente a un material al que se somete a un ensayo simple de tracción, tiene la forma característica que se presenta en la Figura 2.2:

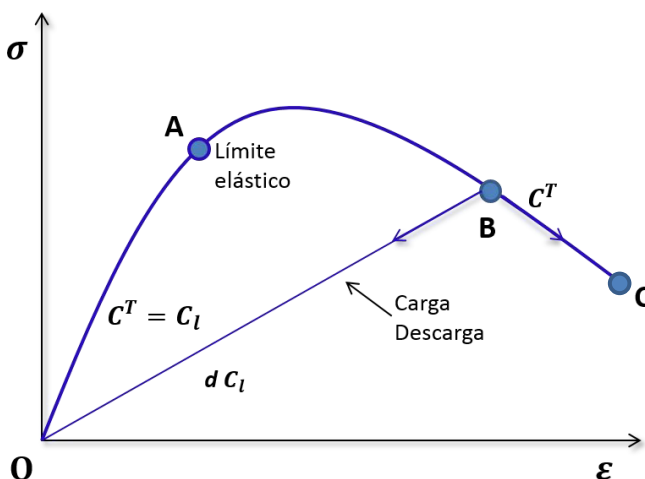


Figura 2.2. Curva tensión-deformación para un modelo de daño

Entre las características más destacables pueden resaltarse los cambios de comportamiento que la curva presenta en los puntos **A**, **B** y **C**. A su vez, estos puntos permiten definir los siguientes tramos de comportamiento:

- El tramo **OA** representa el tramo donde el comportamiento del material es elástico y presupone relaciones lineales entre las tensiones y las deformaciones, como se muestra en la figura. En el caso de que las acciones que produjeron la deformación cesen, el material descargará por la misma línea por la cual evolucionó. Éste es el comportamiento típico de un material en su tramo lineal.
- En el punto **A** se produce el fin del tramo elástico y a partir de ahí la evolución entre tensiones y deformaciones se vuelve no lineal. Toda la evolución en el tramo **ABC** presenta este carácter de no linealidad, de forma que el estado de tensiones, para una deformación dada, depende del entorno del punto concreto del diagrama que se estudie.
- Si tras haber pasado el límite elástico dado por el punto **A**, nos encontramos en un punto, como por ejemplo el **B**, y la carga empieza a disminuir, el material descargará por una línea recta (tramo **OB**) con pendiente menor que la pendiente en el tramo elástico original **OA**.

Teniendo en cuenta todos estos aspectos, parece razonable admitir la existencia de una función que exprese la dependencia de las tensiones con las deformaciones para el material que se está estudiando:

$$\sigma = C(\varepsilon) \quad (2-31)$$

La función dada en (2-31) recibe el nombre de *ley de comportamiento* y describe a nivel mecánico las relaciones existentes entre las tensiones que aparecen en un sólido, cuando se aplican sobre él unas determinadas acciones exteriores, y las deformaciones que producen.

Suponiendo las condiciones apropiadas de suavidad y admitiendo que la función postulada en (2-31) es de clase  $C^2$ , se puede admitir su desarrollo en serie de Taylor a primer orden alrededor de un valor de deformación  $\varepsilon_o$ :

$$\sigma = C(\varepsilon) = C(\varepsilon_o) + \left[ \frac{\partial C(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=\varepsilon_o} (\varepsilon - \varepsilon_o) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 C(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right]_{\varepsilon=\xi} (\varepsilon - \varepsilon_o)^2 \quad (2-32)$$

Donde se tendrá que  $\varepsilon < \xi < \varepsilon_o$ . De forma que si se cumple que  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_o$ , será posible aproximar  $\sigma$  por:

$$\sigma = C(\varepsilon) \approx C(\varepsilon_o) + \left[ \frac{\partial C(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=\varepsilon_o} (\varepsilon - \varepsilon_o)$$

Que haciendo  $\sigma_o = C(\varepsilon_o)$  y que  $C_T = \left[ \frac{\partial C(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=\varepsilon_o}$ , podemos escribir:

$$\Delta\sigma = \sigma - \sigma_o \approx C_T(\varepsilon - \varepsilon_o) = C_T \Delta\varepsilon \quad (2-33)$$

Donde  $C^T$  se denomina *tensor tangente* y constituye una manera de aproximar el estado tensional en las inmediaciones del punto representado por la deformación  $\varepsilon_o$ . Tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_o$  en (2-33), se tendrá:

$$\lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = C^T \quad (2-34)$$

Indicando (2-34) que  $C^T$  no es otra cosa que la derivada primera de las tensiones con respecto a las deformaciones cuando se asume una relación funcional como la dada en (2-31). El tensor tangente así definido, permite acercarse a la tensión  $\sigma$  desde un estado de deformación  $\varepsilon_o$  y representa la tangente a la curva en el punto en cuestión.

En la Figura 2.2, se ha representado la tangente a la curva suponiendo que el punto en cuestión desde el cual se hace la aproximación es el punto **B**. También es importante notar que cuando el material se comporta según el régimen elástico (tramo **OA**), el tensor tangente y la ley de comportamiento postulada en (2-31), evidentemente coinciden, dado su carácter lineal (hecho que también se muestra en la Figura 2.2).

Ahora bien, existe otra manera de aproximarse a las tensiones alrededor del punto **B**. Si suponemos que el material, una vez que ha llegado al estado representado por el punto **B** del diagrama, empieza a descargar por la recta representada en el esquema por el tramo **OB**, su comportamiento vendrá regido, tal y como ya se ha comentado, por una recta con una pendiente menor que la recta correspondiente al tramo elástico. Esta nueva recta vendrá definida por la ecuación:

$$\sigma = dC_l \varepsilon \quad (2-35)$$

Donde  $C_l$  representa la pendiente en el tramo lineal **OA** y  $d$  tendrá un valor que cumplirá que  $0 \leq d \leq 1$  de forma que multiplicará a la pendiente del tramo lineal para disminuirla. El tensor  $dC_l$  recibe el nombre de *tensor secante*. De nuevo, es importante notar que en el tramo elástico se tiene que  $d = 1$  y que:

$$C(\varepsilon) = dC_l \varepsilon = C_T \varepsilon$$

## Bibliografía

- [1] Oliver, X. & Agelet de Saracibar, C., «2. Descripción de la deformación,» de *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, Barcelona, UPC, 2000, pp. 25-65.
- [2] París, F., «2. Deformaciones,» de *Teoría de la Elasticidad*, Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, 2000, pp. 57-92.
- [3] Oller, S., «B2 Bases Termodinámicas de la Ecuación del movimiento,» de *Dinámica No Lineal*, Barcelona, Artes Gráficas Torres, S.A., 2001, pp. 2-1 a 2-8.
- [4] Lekhnitskii, S.G., «CHAPTER I. BASIC EQUATIONS OF THE THEORY OF ELASTICITY OF AN ANISOTROPIC BODY,» de *Anisotropic Plates*, New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1968, pp. 1-14.
- [5] Jones, R. M., «4.2. Classical Lamination Theory,» de *Mechanics of Composite Materials*, Philadelphia, USA, Taylor & Francis, 1999, pp. 190-202.
- [6] Barbero, E. J., *Introduction to Composite Materials Design*, Philadelphia, USA: Taylor & Francis, 1999.
- [7] Reddy, J. N., «The Classical Laminated Plate Theory,» de *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Boca Ratón, Florida, USA, CRC Press, 2003, pp. 112-131.
- [8] París, F.; Cañas, J. & Marín, J.C., «4.1. Teoría General de Laminados,» de *Introducción al diseño de los materiales compuestos*, Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, 2006, pp. 106-111.
- [9] Oller, S., «B5.4 Plasticidad en pequeñas deformaciones,» de *Dinámica no lineal*, Barcelona, Artes Gráficas Torres, S.A., 2001, pp. 5-10 a 5-15.
- [10] París, F., «3. Ley de comportamiento,» de *Teoría de la Elasticidad*, Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, 2000, pp. 93-106.



### 3. Análisis del Efecto de Borde



## 3.1. Introducción

El planteamiento en componentes de tensiones concebido para describir el comportamiento mecánico de un medio continuo, hace de la Teoría de la Elasticidad una herramienta capaz de describir correctamente el estado tensional de un punto correspondiente a un sólido a través de un plano cuando se aplican sobre él determinadas condiciones de carga.

En función de las condiciones de contorno, hipótesis de carga y la geometría del sólido del problema que se quiere resolver, es habitual hacer consideraciones a priori sobre cuáles de las componentes del tensor de tensiones serán predominantes en la solución que se adopte, eliminando la aportación de las restantes en las ecuaciones de campo.

Un planteamiento de este tipo se realiza para construir la llamada Teoría del Laminado que permite obtener las componentes de tensión dentro del plano, utilizando la condición cinemática que admite que, tras deformarse, la línea media permanece perpendicular a la sección del espesor. Una descripción de esta teoría y sus principales aspectos se puede encontrar en el Capítulo 2.

Sin embargo, es bien sabido que las tipologías estructurales a las que se aplica la Teoría del Laminado, las estructuras de tipo lamina, son especialmente sensibles a las tensiones fuera del plano. Esto se debe, en primer lugar, a que las propiedades resistentes y de rigidez en la dirección del espesor son inferiores a las propiedades en el plano ( [1] y [2] ) y, en segundo lugar, a que también aparecen tensiones en la dirección del espesor que no se consideran en una teoría bidimensional. Estas tensiones pueden aparecer incluso aunque las cargas estén contenidas en el plano del laminado, por ejemplo, en puntos cercanos a un borde libre asociadas a las diferencias en el comportamiento entre dos láminas adyacentes con diferentes orientaciones, y a la necesidad de verificar la condición de contorno ( [3] y [4] ). Además, pueden ser muy relevantes en la estimación de la carga de rotura, por lo que una reducción de las mismas puede incrementar la resistencia del laminado.

Asociados al efecto de borde libre hay dos modos de fallo controlados por diferentes componentes del tensor de tensiones. Uno de los modos de fallo más críticos en los laminados es la delaminación, que es controlada por la componente normal en dirección del espesor [5] o por tensiones tangenciales ( [6] y [7] ). Este modo de fallo es responsable de una pérdida significativa de capacidad resistente de la estructura frente a cargas de compresión [8]. El otro de los modos de fallo es el fallo por cortadura que origina fisuras transversales, controlado en este caso por las componentes a cortadura interlaminar del tensor de tensiones. Determinar las componentes de tensión fuera del plano es, por tanto, de gran relevancia así como estimar sus valores relativos para determinar el posible modo de fallo que pueda aparecer [9].

A lo largo del tiempo, se han empleado diversas técnicas para reducir el daño producido por las tensiones interlaminares en el borde de los laminados. Algunas de las técnicas empleadas son el uso de fibras de cosido dispuestas a lo largo del espesor del laminado [10], la inclusión de una capa de adhesivo entre las láminas en el borde ( [11] o [12] ) o modificaciones físicas en el borde del laminado [5]. Otra alternativa consiste en definir secuencias de apilamiento que reduzcan las tensiones interlaminares en el borde [13] y, por tanto, aumenten la

resistencia del laminado. En todos los casos, se requiere una estimación precisa de las tensiones interlaminares.

El uso de modelos bidimensionales para abordar el estudio de estructuras de tipo lamina, como puede ser la Teoría del Laminado, no permite el cálculo de tensiones fuera del plano y, por tanto, puede hacer que se produzca un fallo prematuro en la estructura con resultados catastróficos. Por este motivo, para abordar este problema, se han utilizado otros modelos bidimensionales más elaborados, por ejemplo, el método de la tensión/desplazamiento basado en la capa única equivalente o la llamada teoría '*layerwise*'. En [14] se analiza la precisión de ambos tipos de teorías mostrando que, aunque las segundas son más precisas a la hora de capturar los efectos de borde, presentan dificultades para estimar las tensiones interlaminares con precisión.

Los modelos tridimensionales aplicados de forma general a un problema arbitrario resultan a menudo complejos de abordar. Esta complejidad inherente deriva del hecho de que no existe solución cerrada que permita obtener las tensiones en el borde libre en un caso general tridimensional [15]. A pesar de ello, se han propuesto diversas aproximaciones analíticas para resolver el problema tridimensional. Por ejemplo, en [16] o en [17] se proponen soluciones basadas en la función potencial de tensiones formulada por Lekhnitskii. Por otro lado, en [18] se usa una expansión en serie de Fourier de las variables de campo en las direcciones contenidas en el plano del laminado, para analizar el efecto de borde cuando se aplican cargas de tracción. Una alternativa es la estimación de las tensiones interlaminares mediante consideraciones de equilibrio que junto con hipótesis simplificadoras, permite resolver casos de carga simples y laminados simétricos.

Una aproximación muy extendida es el empleo del Método de los Elementos Finitos, como puede verse en [19], [20] o en [21], el cual requiere un gran afinamiento de la malla para recoger el fenómeno de concentración de tensiones y presenta algunos problemas derivados de la singularidad que aparece en el borde libre [22]. Otras metodologías son el Método de los Elementos de Contorno como los usados en [23] o las diferencias finitas usadas en [24].

El problema de las tensiones fuera del plano asociado a efectos de borde ha sido muy estudiado en la literatura, desde los trabajos pioneros de Pipes & Pagano [24] hasta los trabajos recientes ([9], [15] o [25]). Pueden verse sendas revisiones del estado del arte sobre este asunto en [26] y [27].

Se han estudiado diferentes secuencias de apilamiento tales como 0/90, 90/0, +45/-45, +10/-10 ([19], [20], [23], [3], [4], [9], [15], [25] y [28]). Los resultados muestran que las tensiones interlaminares cerca del borde libre se ven modificadas significativamente con la secuencia de apilamiento y la orientación de las fibras de cada lámina. Sin embargo, no es posible hacer una comparación directa entre estos estudios ya que están realizados sobre materiales, geometrías y condiciones de carga diferentes. Por tanto, se hace necesario un estudio sistemático de diferentes orientaciones y secuencias de apilamiento, que englobe las orientaciones empleadas por diferentes autores y permita obtener conclusiones más generales que aquellas existentes en la literatura.

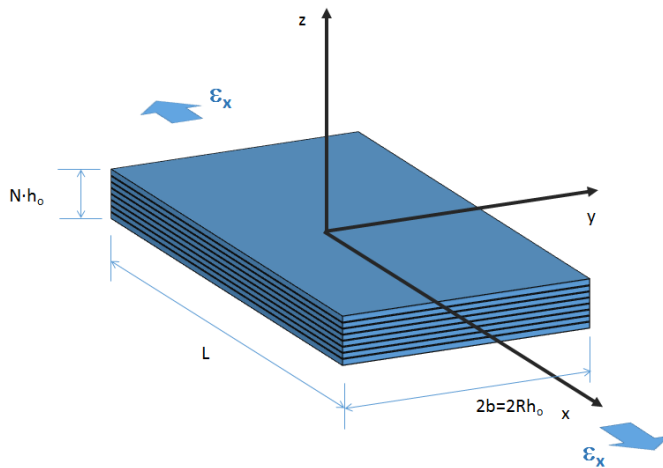
En este capítulo, se analizan las tensiones interlaminares en laminados simétricos, evaluando la influencia de la orientación de las láminas y considerando diferentes secuencias de

apilamiento. Se emplea un modelo clásico basado en diferencias finitas, que se contrasta con resultados de la literatura científica [19], obtenidos mediante una metodología diferente.

Asimismo, el gradiente a lo largo del ancho de la probeta del desplazamiento longitudinal, cerca del borde libre, se analiza como un indicador de las tensiones interlaminares y se verifica su variación con la orientación de la fibra. Dichas variaciones se contrastan con las obtenidas experimentalmente. Finalmente, se analizan cuatro laminados simétricos del mismo material y geometría con diferentes secuencias de apilamiento en las que se varía la orientación de las fibras entre  $0^\circ$  a  $90^\circ$ .

### 3.2. Descripción del problema y ejes de ortotropía

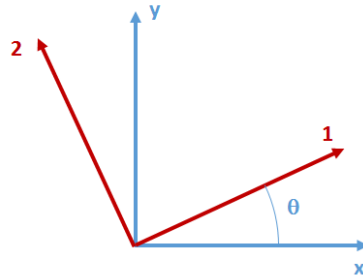
El problema que se pretende resolver es un laminado simétrico respecto del plano 'xy' compuesto por un número  $N$  de láminas, sometido a un estado de deformación  $\varepsilon_x$  de tracción en sus extremos. Cada lámina tendrá un espesor de  $h_0$ , siendo el espesor para todo el laminado de  $Nh_0$ , un ancho de  $2b$  y una longitud de  $L$ . Se cumple que  $b \ll L$  y se considera una relación geométrica  $R$  entre  $b$  y  $h_0$ . En la Figura 3.1, se puede apreciar el sistema de ejes geométricos que se utilizará para plantear el problema:



**Figura 3.1. Sistema de ejes geométricos para el laminado**

Dado que las direcciones principales de ortotropía para cada una de las láminas no coincidirá, en general, con las direcciones geométricas de aplicación de la carga, se hace necesario conocer la relación entre las constantes elásticas de cada una de las láminas expresadas en los ejes geométricos de aplicación de la carga y las constantes elásticas expresadas en ejes de ortotropía de cada una de las láminas.

De forma general, ambos sistemas de ejes (los ejes '12' serán los principales de ortotropía y los 'xy' serán los ejes geométricos de aplicación de la carga, mientras que los terceros ejes serán perpendiculares al plano del dibujo y coincidentes en todo momento) se esquematizan a continuación:



**Figura 3.2. Relación entre los ejes geométricos de aplicación de la carga y ejes principales**

La relación entre magnitudes vectoriales expresadas en ambos sistemas de ejes se puede expresar mediante una relación del tipo:

$$\overrightarrow{v_{xy}} = T \overrightarrow{v_{12}}$$

Donde:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Representando esta última matriz un giro alrededor del eje 'z' de ángulo  $\theta$ . Así la relación de magnitudes tensoriales expresadas en estos sistemas de ejes se escribe para el tensor de tensiones y el tensor de pequeñas deformaciones<sup>1</sup>:

$$\sigma = T \sigma' T^T \quad (3-1)$$

$$\varepsilon = T \varepsilon' T^T \quad (3-2)$$

Donde, debido a que  $T$  es una matriz de giro, se tiene que  $T^{-1} = T^T$ . Alternativamente:

<sup>1</sup> En los desarrollos de este capítulo, se asumirán pequeñas deformaciones por lo que se utilizarán las componentes de deformación obtenidas para dicho régimen en el Capítulo 2.

$$\sigma' = T^T \sigma T \quad (3-3)$$

$$\varepsilon' = T^T \varepsilon T \quad (3-4)$$

Donde:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Desarrollando (3-1) y adoptando la notación de Voigt para los tensores se tiene que:

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

Y análogamente para (3-3):

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3-6)$$

La relación para las componentes del tensor de deformaciones en ambos sistemas de ejes se escribe:

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 2\sin \theta \cos \theta & -2\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

Donde se ha tenido en cuenta que  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  (para  $i \neq j$ ). Análogamente también se tendrá:

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

Por otro lado, la ley de comportamiento en ejes principales para una lámina de material ortótropo se escribe:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

Sustituyendo (3-6) y (3-8) en (3-9) y teniendo en cuenta que (3-6) es la relación inversa de la (3-5), se puede escribir:



$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Y teniendo en cuenta que la ley de comportamiento para una lámina de material ortótropo en ejes no principales se escribe:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{13} & 0 & 0 & \overline{C}_{16} \\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{23} & 0 & 0 & \overline{C}_{26} \\ \overline{C}_{13} & \overline{C}_{23} & \overline{C}_{33} & 0 & 0 & \overline{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{44} & \overline{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{45} & \overline{C}_{55} & 0 \\ \overline{C}_{16} & \overline{C}_{26} & \overline{C}_{36} & 0 & 0 & \overline{C}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

Finalmente, efectuando los productos matriciales en (3-10) e igualando a (3-11), se pueden obtener las siguientes relaciones para los coeficientes de la ley de comportamiento de una lámina en ejes no principales en función de los coeficientes expresados en ejes principales:

$$\begin{aligned} \overline{C}_{11} &= C_{11}\cos^4\theta + C_{22}\sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\ \overline{C}_{22} &= C_{11}\sin^4\theta + C_{22}\cos^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\ \overline{C}_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ \overline{C}_{66} &= (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{66}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \\ \overline{C}_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ \overline{C}_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ \overline{C}_{36} &= (C_{13} - C_{23})\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \quad (3-12)$$

$$\overline{C_{13}} = C_{13} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta$$

$$\overline{C_{23}} = C_{13} \sin^2 \theta + C_{23} \cos^2 \theta$$

$$\overline{C_{33}} = C_{33}$$

$$\overline{C_{44}} = C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta$$

$$\overline{C_{55}} = C_{44} \sin^2 \theta + C_{55} \cos^2 \theta$$

$$\overline{C_{45}} = (C_{55} - C_{44}) \sin \theta \cos \theta$$

### 3.3. Ecuaciones de campo y condiciones de contorno

#### Forma funcional del campo de desplazamiento

En este problema, se estudia el caso de un laminado sometido a tracción uniaxial en los bordes. En estas condiciones, el equilibrio de tensiones predice que las componentes del tensor de tensiones serán independientes de la coordenada 'x' en puntos suficientemente alejados de la zona de aplicación de la carga (Principio de Saint-Venant).

La independencia de las tensiones con respecto a 'x' se traducirá en independencia también con respecto a 'x' de las componentes del tensor de deformaciones<sup>2</sup>. Las relaciones de deformación-desplazamiento en pequeñas deformaciones tienen la forma:

$$\varepsilon_x = u_{,x}$$

$$\varepsilon_y = v_{,y}$$

$$\varepsilon_z = w_{,z}$$

$$\gamma_{yz} = w_{,y} + v_{,z}$$

$$\gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$$

(3-13)

Dado que las deformaciones deberán ser independientes de 'x', el campo de desplazamientos más general que se puede suponer tendrá la siguiente forma funcional:

<sup>2</sup> Según (3-11), para unos valores determinados de las constantes elásticas del material, el estado de tensiones independiente de 'x' podría venir producido por un estado de deformaciones dependiente de 'x'. Sin embargo, dado que el razonamiento de equilibrio efectuado debe ser aplicable a cualquier material y, por tanto, válido para cualquier conjunto de constantes elásticas, se requiere la independencia con respecto a 'x' de las deformaciones.

$$\begin{aligned}
u &= f_1(x, y, z) + U(y, z) \\
v &= f_2(x, y, z) + V(y, z) \\
w &= f_3(x, y, z) + W(y, z)
\end{aligned} \tag{3-14}$$

Aplicando las relaciones (3-13), se tendrá:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= f_{1,x} \\
\varepsilon_y &= f_{2,y} + V_{,y} \\
\varepsilon_z &= f_{3,z} + W_{,z} \\
\gamma_{yz} &= f_{2,z} + f_{3,y} + V_{,z} + W_{,y} \\
\gamma_{xz} &= f_{1,z} + f_{3,x} + U_{,z} \\
\gamma_{xy} &= f_{1,y} + f_{2,x} + U_{,y}
\end{aligned} \tag{3-15}$$

Donde se ha tenido en cuenta en las dos últimas que  $W_{,x} = V_{,x} = 0$ . Teniendo en cuenta que  $\varepsilon_x$  debe ser independiente de 'x', se deberá verificar:

$$f_1(x, y, z) = C(y, z)x + D(y, z) \tag{3-16}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{xy}$  deben ser también independientes de la coordenada 'x', se tiene que una solución para este problema debe cumplir, en primer lugar:

$$f_{1,z} + f_{3,x} = C_{,z}(y, z)x + D_{,z}(y, z) + f_{3,x}(x, y, z) \neq f(x)$$

Esta última condición es posible siempre que:

$$C_{,z}(y, z)x + f_{3,x}(x, y, z) \neq f(x)$$

Y de aquí, se deduce la forma funcional de  $f_{3,x}(x, y, z)$ :

$$f_{3,x}(x, y, z) = -C_{,z}(y, z)x + H(y, z) \neq f(x)$$

E integrando con respecto a x:

$$f_3(x, y, z) = -\frac{C_{,z}(y, z)x^2}{2} + H(y, z)x + Q \tag{3-17}$$

Análogamente, se tiene que:

$$f_{1,y} + f_{2,x} = C_{,y}(y, z)x + D_{,y}(y, z) + f_{2,x}(x, y, z) \neq f(x)$$

Que es posible siempre que:

$$C_{,y}(y, z)x + f_{2,x}(x, y, z) \neq f(x)$$

La condición anterior obliga a que la forma funcional de  $f_{2,x}(x, y, z)$  sea:

$$f_{2,x}(x, y, z) = -C_{,y}(y, z)x + G(y, z)$$

E integrando, de nuevo, con respecto a  $x$ :

$$f_2(x, y, z) = -\frac{C_{,y}(y, z)x^2}{2} + G(y, z)x + S \quad (3-18)$$

Sin pérdida de generalidad, se puede hacer la elección<sup>3</sup>:

$$G(y, z) = -D_{,y}(y, z) \quad (3-19)$$

$$S = 0 \quad (3-20)$$

Finalmente, debe imponerse también que:

$$f_{2,z} + f_{3,y} = -\frac{C_{,yz}(y, z)x^2}{2} - D_{,yz}(y, z)x - \frac{C_{,zy}(y, z)x^2}{2} + H_{,y}(y, z)x \neq f(x)$$

Que se cumple si:

$$C_{,yz}(y, z) = C_{,zy}(y, z) = 0 \quad (3-21)$$

$$H_{,y}(y, z) = D_{,yz}(y, z)$$

---

<sup>3</sup>Es interesante observar que al hacer esta selección se tendrá que  $f_{1,y} + f_{2,x} = 0$ . Se pueden hacer otras elecciones, dando lugar a diferentes formas funcionales. En cualquier caso, esta elección no condiciona las funciones  $U(y, z)$ ,  $V(y, z)$  y  $W(y, z)$  que contienen el significado físico relevante para este problema.

Integrando, respecto de 'y', la segunda:

$$H(y, z) = D_{,z}(y, z) + T \quad (3-22)$$

Introduciendo (3-19) y (3-20) en (3-18) y (3-22) en (3-17), se tiene para  $f_2(x, y, z)$  y  $f_3(x, y, z)$ :

$$f_2(x, y, z) = -\frac{C_{,y}(y, z)x^2}{2} - D_{,y}(y, z)x \quad (3-23)$$

$$f_3(x, y, z) = -\frac{C_{,z}(y, z)x^2}{2} + (D_{,z}(y, z) + T)x + Q \quad (3-24)$$

Pero para tener que  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  sean funciones independientes de 'x' es necesario que  $f_{2,y} \neq f(x)$  y  $f_{3,z} \neq f(x)$ , es decir:

$$f_{2,y}(x, z) = -\frac{C_{,yy}(y, z)x^2}{2} - D_{,yy}(y, z)x \neq f(x)$$

$$f_{3,z}(x, y) = -\frac{C_{,zz}(y, z)x^2}{2} + D_{,zz}(y, z)x \neq f(x)$$

Estas últimas condiciones sólo son posibles si:

$$C_{,yy} = C_{,zz} = D_{,yy} = D_{,zz} = 0$$

Que, junto con la primera de (3-21), constituyen argumentos para deducir las siguientes formas funcionales para  $C(y, z)$  y  $D(y, z)$ :

$$C(y, z) = Ay + Bz + C \quad (3-25)$$

$$D(y, z) = -Mzy - Ny + Oz \quad (3-26)$$

Donde  $A, B, C, M, N, O, T$  y  $Q$  son constantes a determinar. Sustituyendo (3-25) y (3-26) en (3-16), (3-23) y (3-24) y, a su vez, éstas últimas en las relaciones (3-14), se tienen finalmente las siguientes formas funcionales para el campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned}
u &= (Ay + Bz + C)x - Mzy - Ny + Oz + U(y, z) \\
v &= -\frac{Ax^2}{2} + (Mz + N)x + V(y, z) \\
w &= -\frac{Bx^2}{2} + (O - My + T)x + Q + W(y, z)
\end{aligned} \tag{3-27}$$

### Condiciones de simetría

Para terminar de fijar la forma funcional del campo de desplazamientos, es necesario aplicar condiciones de simetría al problema. Las condiciones de simetría que se toman son las dadas en [24].

Debido a que sólo se considerarán laminados con secuencias de apilamiento simétricas respecto del plano 'xy', dicho plano será un plano de simetría geométrica. Esto último unido a que el estado de tracción impuesta constituye un estado de carga simétrico, el campo de desplazamientos debe respetar condiciones de simetría respecto de los planos coordenados 'xy' y 'xz'. Las condiciones de simetría con respecto al plano 'xy' son:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u(x, y, -z) \\
v(x, y, z) &= v(x, y, -z) \\
w(x, y, z) &= -w(x, y, -z)
\end{aligned} \tag{3-28}$$

Mientras que con respecto al plano 'xz' se tiene que:

$$\begin{aligned}
v(x, y, z) &= -v(x, -y, z) \\
w(x, y, z) &= w(x, -y, z)
\end{aligned} \tag{3-29}$$

La primera de las relaciones (3-28) implica que  $B = M = 0$ , mientras que la tercera implica que  $O = T = Q = 0$ . Por otro lado, la primera de las (3-29) implica que  $A = N = 0$ . Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, se tiene que el campo de desplazamientos que respete las condiciones de simetría, para una lámina, debe tener la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u &= Cx + U(y, z) \\
v &= V(y, z) \\
w &= W(y, z)
\end{aligned} \tag{3-30}$$

Por otro lado, debe tenerse continuidad de desplazamientos en las interfases entre las láminas. Esto último implica que la constante  $C$  debe ser la misma para todas las láminas y por consiguiente la deformación  $\varepsilon_x$  para este problema cumplirá que:

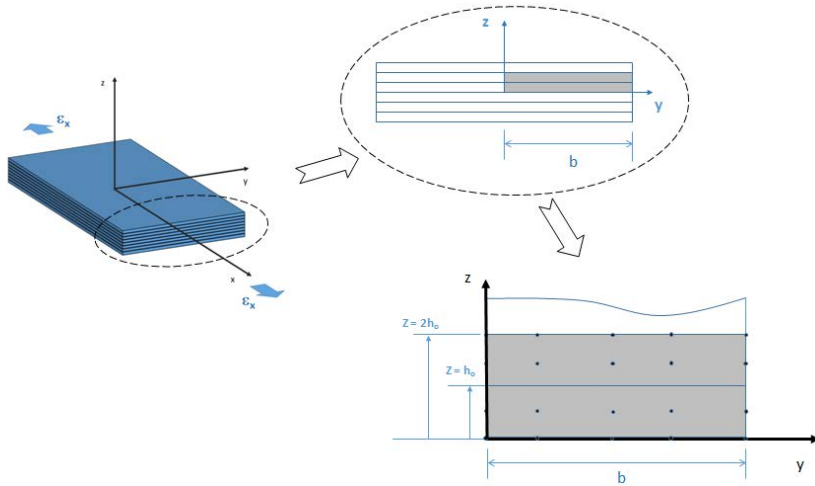
$$\varepsilon_x = C$$

De esta manera, queda establecido que un laminado simétrico, como el que se está estudiando, sometido a un estado de tracción uniaxial uniforme sufrirá una deformación  $\varepsilon_x$  constante y uniforme en la misma dirección en la que se aplica la carga.

La constante  $C$  debe ser igual a la deformación axial que se impone para el ensayo. Así de las relaciones (3-30), (3-13) y de la ley de comportamiento para cada lámina dada en (3-11), se tiene para las componentes del tensor de tensiones<sup>4</sup>:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(U, V, W) = \sigma_{ij}(y, z) \quad (3-31)$$

Lo que muestra que las componentes de tensiones y deformaciones de nuestro problema dependen sólo de ' $y$ ' y ' $z$ ', debiendo añadirse *a posteriori* a la solución del campo de desplazamientos el término  $\varepsilon_x x$ . Por tanto, es posible limitarse a estudiar la parte del laminado contenida en el primer cuadrante:



**Figura 3.3. Corte transversal del laminado en el plano 'yz'**

Por otro lado, las partes funcionales  $U$ ,  $V$  y  $W$  deben cumplir con las condiciones de simetría anteriormente citadas. Para ver las implicaciones de las condiciones de simetría respecto del

<sup>4</sup> Evidentemente la condición (3-31) fue el argumento de partida, así que haberla vuelto a obtener constituye un argumento de consistencia.

plano 'xy', se desarrolla, en serie de Taylor a primer orden, la primera componente del campo de desplazamiento alrededor de un punto del plano 'xy' situado por encima del mismo ( $z = \xi$  con  $\xi \sim 0$ ) y por debajo ( $z = -\xi$  con  $\xi \sim 0$ ):

$$U(y, \xi) \approx U(y, 0) + [U_{,z}]_{z=0}(\xi)$$

$$U(y, -\xi) \approx U(y, 0) + [U_{,z}]_{z=0}(-\xi)$$

Restando ambas expresiones:

$$U(y, \xi) - U(y, -\xi) = [U_{,z}]_{z=0} 2\xi$$

Pero aplicando la primera de las relaciones (3-28) y dado que  $\xi$  es arbitrario:

$$[U_{,z}]_{z=0} = U_{,z}(y, 0) = 0$$

Análogamente, aplicando la segunda de las relaciones (3-28) para la segunda componente del campo de desplazamiento:

$$[V_{,z}]_{z=0} = V_{,z}(y, 0) = 0$$

Para la tercera componente se puede escribir:

$$W(y, \xi) \approx W(y, 0) + [W_{,z}]_{z=0}(\xi)$$

$$W(y, -\xi) \approx W(y, 0) + [W_{,z}]_{z=0}(-\xi)$$

Y, sumando ambas expresiones:

$$W(y, \xi) + W(y, -\xi) = 2W(y, 0)$$

Pero aplicando la tercera de las condiciones (3-28):

$$W(y, 0) = 0$$

Por otro lado, para ver las implicaciones de las condiciones de simetría respecto del plano 'xz', se puede desarrollar en serie de Taylor, a primer orden, la tercera componente del campo de



desplazamiento alrededor de un punto del plano 'xz' situado a la izquierda ( $y = -\xi$  con  $\xi \sim 0$ ) y a la derecha ( $y = \xi$  con  $\xi \sim 0$ ):

$$W(\xi, z) \approx W(0, z) + [W_{,y}]_{y=0}(\xi)$$

$$W(-\xi, z) \approx W(0, z) + [W_{,y}]_{y=0}(-\xi)$$

Restando ambas expresiones:

$$W(\xi, z) - W(-\xi, z) = [W_{,y}]_{y=0} 2\xi$$

Pero, aplicando la segunda de las relaciones (3-29):

$$[W_{,y}]_{y=0} = W_{,y}(0, z) = 0$$

Análogamente, para la segunda componente:

$$V(\xi, z) \approx V(0, z) + [V_{,y}]_{y=0}(\xi)$$

$$V(-\xi, z) \approx V(0, z) + [V_{,y}]_{y=0}(-\xi)$$

Y sumando ambas expresiones:

$$V(\xi, z) + V(-\xi, z) = 2V(0, z)$$

Aplicando la primera de las condiciones (3-29), se tiene finalmente:

$$V(0, z) = 0$$

Recogiendo los resultados anteriores, a lo largo del eje 'y' (Figura 3.3), se cumplirán las relaciones de simetría:

$$U_{,z}(y, 0) = 0$$

$$V_{,z}(y, 0) = 0$$

$$W(y, 0) = 0$$

(3-32)

Mientras que a lo largo del eje 'z' (Figura 3.3), se cumplen las relaciones de simetría:

$$\begin{aligned} V(0, z) &= 0 \\ W_{,y}(0, z) &= 0 \end{aligned} \quad (3-33)$$

Adicionalmente, para impedir los desplazamientos como sólido rígido, se considera que:

$$\begin{aligned} U(0, z) &= U(0, 0) = 0 \\ V(0, 0) &= 0 \\ W(0, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (3-34)$$

### Ecuaciones de campo y condiciones de contorno

Las componentes del tensor de tensiones tienen que satisfacer las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0$$

Que, en ausencia de fuerzas de volumen ( $X_i = 0$ ), y teniendo en cuenta (3-31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3-35)$$

Introduciendo (3-30) en (3-13) se tiene que la forma funcional de las deformaciones es para este problema:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C \\ \varepsilon_y &= V_{,y} \\ \varepsilon_z &= W_{,z} \\ \gamma_{yz} &= W_{,y} + V_{,z} \end{aligned}$$

$$\gamma_{xz} = U_{,z}$$

$$\gamma_{xy} = U_{,y}$$

Y, a su vez, éstas en la ley de comportamiento:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \overline{C}_{12}C + \overline{C}_{22}V_{,y} + \overline{C}_{23}W_{,z} + \overline{C}_{26}U_{,y} \\ \sigma_z &= \overline{C}_{13}C + \overline{C}_{23}V_{,y} + \overline{C}_{33}W_{,z} + \overline{C}_{36}U_{,y} \\ \sigma_{yz} &= \overline{C}_{44}(W_{,y} + V_{,z}) + \overline{C}_{45}U_{,z} \\ \sigma_{xz} &= \overline{C}_{45}(W_{,y} + V_{,z}) + \overline{C}_{55}U_{,z} \\ \sigma_{xy} &= \overline{C}_{16}C + \overline{C}_{26}V_{,y} + \overline{C}_{36}W_{,z} + \overline{C}_{66}U_{,y}\end{aligned}\tag{3-36}$$

Finalmente, sustituyendo las tensiones en las ecuaciones de equilibrio (3-35) se obtiene:

$$\begin{aligned}\overline{C}_{26}V_{,yy} + \overline{C}_{36}W_{,zy} + \overline{C}_{66}U_{,yy} + \overline{C}_{45}(W_{,yz} + V_{,zz}) + \overline{C}_{55}U_{,zz} &= 0 \\ \overline{C}_{22}V_{,yy} + \overline{C}_{23}W_{,zy} + \overline{C}_{26}U_{,yy} + \overline{C}_{44}(W_{,yz} + V_{,zz}) + \overline{C}_{45}U_{,zz} &= 0 \\ \overline{C}_{44}(W_{,yy} + V_{,zy}) + \overline{C}_{45}U_{,zy} + \overline{C}_{23}V_{,yz} + \overline{C}_{33}W_{,zz} + \overline{C}_{36}U_{,yz} &= 0\end{aligned}$$

Que se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\overline{C}_{26}V_{,yy} + (\overline{C}_{36} + \overline{C}_{45})W_{,yz} + \overline{C}_{66}U_{,yy} + \overline{C}_{45}V_{,zz} + \overline{C}_{55}U_{,zz} &= 0 \\ \overline{C}_{22}V_{,yy} + (\overline{C}_{23} + \overline{C}_{44})W_{,yz} + \overline{C}_{26}U_{,yy} + \overline{C}_{44}V_{,zz} + \overline{C}_{45}U_{,zz} &= 0 \\ \overline{C}_{44}W_{,yy} + (\overline{C}_{45} + \overline{C}_{36})U_{,yz} + (\overline{C}_{23} + \overline{C}_{44})V_{,yz} + \overline{C}_{33}W_{,zz} &= 0\end{aligned}\tag{3-37}$$

Las expresiones (3-37) representan las ecuaciones de equilibrio interno de la lámina y son las ecuaciones de campo que las componentes de los desplazamientos deben verificar en todo punto interior del continuo. Esta formulación en desplazamientos corresponde a una visión de las ecuaciones de la elasticidad en forma de ecuaciones de Navier.

Por otro lado, también deben verificarse las condiciones de borde libre de tensión en el corte representado en la Figura 3.3. Estas condiciones establecen que los puntos contenidos en la cara exterior del laminado paralela al plano coordenado 'xz' deben estar libres de tensiones, es decir, en los puntos contenidos en esta cara deberá tenerse:

$$\sigma_y = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0$$

A través de las relaciones (3-36), esta condición de contorno para la cara exterior vertical de la Figura 3.3 ( $y = b, z$ ) queda:

$$\begin{aligned}\overline{C}_{12}C + \overline{C}_{22}V_{,y} + \overline{C}_{23}W_{,z} + \overline{C}_{26}U_{,y} &= 0 \\ \overline{C}_{44}W_{,y} + \overline{C}_{44}V_{,z} + \overline{C}_{45}U_{,z} &= 0 \\ \overline{C}_{16}C + \overline{C}_{26}V_{,y} + \overline{C}_{36}W_{,z} + \overline{C}_{66}U_{,y} &= 0\end{aligned}\tag{3-38}$$

Análogamente, la condición de borde libre de tensiones para la cara exterior horizontal de la Figura 3.3 de coordenadas ( $y, z = \left(\frac{N}{2}\right)h_0$ ) se escribe:

$$\sigma_z = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$$

Que, utilizando, de nuevo, (3-36):

$$\begin{aligned}\overline{C}_{13}C + \overline{C}_{23}V_{,y} + \overline{C}_{33}W_{,z} + \overline{C}_{36}U_{,y} &= 0 \\ \overline{C}_{44}W_{,y} + \overline{C}_{44}V_{,z} + \overline{C}_{45}U_{,z} &= 0 \\ \overline{C}_{45}W_{,y} + \overline{C}_{45}V_{,z} + \overline{C}_{55}U_{,z} &= 0\end{aligned}\tag{3-39}$$

Las ecuaciones diferenciales (3-37) para las componentes del vector desplazamiento sujetas a las condiciones de contorno (3-38) y (3-39) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas en derivadas parciales cuya resolución requiere algún esquema numérico de resolución. Conviene resaltar que, hasta el momento, las únicas consideraciones realizadas se pueden resumir en:

- Se ha utilizado el hecho de que, en el ensayo de tracción, se puede suponer una forma funcional para deformaciones y tensiones (3-31), que implique independencia con respecto a la coordenada 'x'. A su vez, tras un proceso de integración apropiado, se llega a una forma funcional requerida para el campo de desplazamientos (3-27), que asegure la independencia de las tensiones y deformaciones con respecto a 'x'.
- La condición de simetría, tanto del laminado como del estado de carga, permite establecer las condiciones (3-28) y (3-29) para el campo de desplazamientos que permiten especificar todavía más la forma funcional de dichos campos (3-30).

Conviene hacer un análisis dimensional que permita ver los parámetros de los que depende el problema. Para ello, resulta útil definir las siguientes variables adimensionales:

$$\bar{y} = \frac{y}{b}$$

$$\bar{z} = \frac{z}{h_o}$$

$$\bar{U} = \frac{U}{h_o}$$

$$\bar{V} = \frac{V}{b}$$

$$\bar{W} = \frac{W}{h_o}$$

Junto con la relación de aspecto:

$$b = Rh_o$$

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, las ecuaciones (3-37), (3-38) y (3-39) se pueden reescribir:

$$\begin{aligned} R\bar{C}_{26}\bar{V}_{,\bar{y}\bar{y}} + R(\bar{C}_{36} + \bar{C}_{45})\bar{W}_{,\bar{y}\bar{z}} + \bar{C}_{66}\bar{U}_{,\bar{y}\bar{y}} + R^3\bar{C}_{45}\bar{V}_{,\bar{z}\bar{z}} + R^2\bar{C}_{55}\bar{U}_{,\bar{z}\bar{z}} &= 0 \\ R\bar{C}_{22}\bar{V}_{,\bar{y}\bar{y}} + R(\bar{C}_{23} + \bar{C}_{44})\bar{W}_{,\bar{y}\bar{z}} + \bar{C}_{26}\bar{U}_{,\bar{y}\bar{y}} + R^3\bar{C}_{44}\bar{V}_{,\bar{z}\bar{z}} + R^2\bar{C}_{45}\bar{U}_{,\bar{z}\bar{z}} &= 0 \\ \bar{C}_{44}\bar{W}_{,\bar{y}\bar{y}} + R(\bar{C}_{45} + \bar{C}_{36})\bar{U}_{,\bar{y}\bar{z}} + R^2(\bar{C}_{23} + \bar{C}_{44})\bar{V}_{,\bar{y}\bar{z}} + R^2\bar{C}_{33}\bar{W}_{,\bar{z}\bar{z}} &= 0 \end{aligned} \quad (3-40)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{22}\bar{V}_{,\bar{y}} + \bar{C}_{23}\bar{W}_{,\bar{z}} + \frac{1}{R}\bar{C}_{26}\bar{U}_{,\bar{y}} &= -\bar{C}_{12}\varepsilon_x \\ \frac{1}{R}\bar{C}_{44}\bar{W}_{,\bar{y}} + R\bar{C}_{44}\bar{V}_{,\bar{z}} + \bar{C}_{45}\bar{U}_{,\bar{z}} &= 0 \end{aligned} \quad (3-41)$$

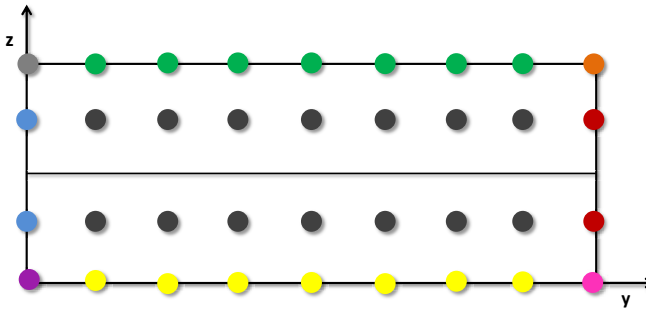
$$\begin{aligned} \bar{C}_{26}\bar{V}_{,\bar{y}} + \bar{C}_{36}\bar{W}_{,\bar{z}} + \frac{1}{R}\bar{C}_{66}\bar{U}_{,\bar{y}} &= -\bar{C}_{16}\varepsilon_x \\ \bar{C}_{23}\bar{V}_{,\bar{y}} + \bar{C}_{33}\bar{W}_{,\bar{z}} + \frac{1}{R}\bar{C}_{36}\bar{U}_{,\bar{y}} &= -\bar{C}_{13}\varepsilon_x \\ \frac{1}{R}\bar{C}_{44}\bar{W}_{,\bar{y}} + R\bar{C}_{44}\bar{V}_{,\bar{z}} + \bar{C}_{45}\bar{U}_{,\bar{z}} &= 0 \\ \frac{1}{R}\bar{C}_{45}\bar{W}_{,\bar{y}} + R\bar{C}_{45}\bar{V}_{,\bar{z}} + \bar{C}_{55}\bar{U}_{,\bar{z}} &= 0 \end{aligned} \quad (3-42)$$

La solución al sistema de ecuaciones diferenciales, siendo sus ecuaciones de campo las relaciones (3-40) sujetas a las condiciones de contorno (3-41) y (3-42), serán las componentes del campo de desplazamientos adimensionalizadas. El análisis anterior muestra que éstas sólo dependen de la relación 'R'. Este resultado es importante a la hora de analizar la dependencia de la solución con las dimensiones concretas de una probeta.

### 3.4. Discretización del problema

#### Fórmulas de aproximación

Este sistema se resuelve aplicando un esquema de diferencias finitas para las ecuaciones de campo (3-37) y sus condiciones de contorno (3-38) y (3-39). En primer lugar, será necesario discretizar el dominio según el esquema mostrado en la Figura 3.4:



**Figura 3.4. Esquema de colores para representar la discretización del dominio de interés**

En el dominio representado se hacen las siguientes discretizaciones espaciales para 'y' y 'z':

$$\begin{aligned}
 y = jk \quad \text{donde} \quad j = 0, 1, \dots, m; \quad 0 \leq y \leq b; \quad k = \frac{b}{m} \\
 z = sq \quad \text{donde} \quad s = 0, 1, \dots, n; \quad 0 \leq z \leq \frac{Nh_0}{2}; \quad q = \frac{Nh_0}{2n}
 \end{aligned}
 \tag{3-43}$$

La malla elegida se dispone de forma que siempre haya dos filas (una por encima y otra por debajo) de puntos materiales a lo largo de cada interfase y de forma que siempre estén definidas las constantes mecánicas para cada uno de los puntos de la malla. Se asume también que las interfasas quedarán confinadas entre estas dos filas de puntos discretos en todo el proceso de deformación.

Una vez reducido el dominio de interés a unos puntos concretos se hace necesario, para poder construir un esquema de diferencias finitas, escribir las derivadas de las componentes del campo de desplazamientos en un punto, en términos de los valores de las componentes evaluadas en puntos adyacentes. Para ello, se utilizarán desarrollos de Taylor combinados convenientemente.

Para las derivadas segundas de  $f(p)$  ( $f$  puede ser  $U$ ,  $V$  o  $W$ ) respecto de la misma variable  $p$  (puede ser 'y' o 'z'), se utilizarán los siguientes desarrollos de Taylor hasta orden tercero en

términos de los incrementos para las variables independientes  $\Delta$  ( $\Delta$  puede ser  $k$  o  $q$  definidas en (3-43))<sup>5</sup>:

$$f(p_{i+1}) = f(p_i + \Delta) = f(p_i) + \Delta f'(p_i) + \frac{1}{2}\Delta^2 f''(p_i) + \frac{1}{6}\Delta^3 f'''(p_i) + \frac{1}{24}\Delta^4 f^{IV}(\xi^+)$$

$$f(p_{i-1}) = f(p_i - \Delta) = f(p_i) - \Delta f'(p_i) + \frac{1}{2}\Delta^2 f''(p_i) - \frac{1}{6}\Delta^3 f'''(p_i) + \frac{1}{24}\Delta^4 f^{IV}(\xi^-)$$

Donde  $\xi^+$  es un valor tal que  $p_i \leq \xi^+ \leq p_{i+1}$  y  $\xi^-$  tal que  $p_{i-1} \leq \xi^- \leq p_i$ . Sumando ambas expresiones se tiene para la segunda derivada:

$$f(p_{i+1}) + f(p_{i-1}) = 2f(p_i) + \Delta^2 f''(p_i) + \frac{1}{24}\Delta^4 (f^{IV}(\xi^+) + f^{IV}(\xi^-))$$

Aplicando el teorema del valor medio se tendrá  $(f^{IV}(\xi^+) + f^{IV}(\xi^-)) = (2f^{IV}(\xi))$ , donde  $\xi^- \leq \xi \leq \xi^+$  y, por tanto:

$$f(p_{i+1}) + f(p_{i-1}) = 2f(p_i) + \Delta^2 f''(p_i) + \frac{1}{12}\Delta^4 f^{IV}(\xi)$$

Que, despejando y sustituyendo la notación para la derivada segunda por un subíndice:

$$f_{,pp}(p_i) = \frac{f(p_{i+1}) + f(p_{i-1}) - 2f(p_i)}{\Delta^2} - \frac{1}{12}\Delta^2 f^{IV}(\xi)$$

$$= \frac{f(p_{i+1}) + f(p_{i-1}) - 2f(p_i)}{\Delta^2} + O(\Delta^2)$$

Donde se ha expresado que el error que se comete al utilizar esta fórmula es de orden  $O(\Delta^2)$ . Despreciando el error se puede escribir para un dominio discretizado como el mostrado en la Figura 3.4:

$$f_{,pp} = \frac{1}{\Delta^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \quad (3-44)$$

Que es una fórmula en diferencias finitas centradas para la derivada segunda respecto de una variable dos veces. Análogamente, para obtener una fórmula de aproximación para las derivadas segundas cruzadas con respecto a 'y' y 'z', se parte de los siguientes desarrollos de Taylor a segundo orden para una función de dos variables:

<sup>5</sup> $i$  puede ser la  $j$  o la  $s$  que se definen en (3-43) y sirven para indicar el valor discretizado de 'y' o 'z'.

$$f(y_{j+1}, z_{s+1}) \approx f(y_j, z_s) + f_{,y}k + f_{,z}q + \frac{1}{2}k^2 f_{,yy} + \frac{1}{2}q^2 f_{,zz} + kq f_{,yz}$$

$$f(y_{j+1}, z_{s-1}) \approx f(y_j, z_s) + f_{,y}k - f_{,z}q + \frac{1}{2}k^2 f_{,yy} + \frac{1}{2}q^2 f_{,zz} - kq f_{,yz}$$

$$f(y_{j-1}, z_{s+1}) \approx f(y_j, z_s) - f_{,y}k + f_{,z}q + \frac{1}{2}k^2 f_{,yy} + \frac{1}{2}q^2 f_{,zz} - kq f_{,yz}$$

$$f(y_{j-1}, z_{s-1}) \approx f(y_j, z_s) - f_{,y}k - f_{,z}q + \frac{1}{2}k^2 f_{,yy} + \frac{1}{2}q^2 f_{,zz} + kq f_{,yz}$$

Donde se ha adquirido la notación con subíndices para las derivadas. Efectuando la siguiente combinación:

$$\frac{f(y_{j+1}, z_{s+1}) - f(y_{j+1}, z_{s-1}) - f(y_{j-1}, z_{s+1}) + f(y_{j-1}, z_{s-1})}{4kq} = f_{,yz} + O(kq)$$

Y donde, también, se ha hecho referencia al error que se comete al utilizar esta fórmula de aproximación. Despreciando dicho error para la segunda derivada cruzada de una componente del campo de desplazamientos:

$$f_{,yz} = \frac{(f_{j+1,s+1} - f_{j+1,s-1} - f_{j-1,s+1} + f_{j-1,s-1})}{4kq} \quad (3-45)$$

Con las fórmulas (3-44) y (3-45), se tienen las ecuaciones de campo (3-37) para cada uno de los puntos interiores del dominio (puntos negros) en la Figura 3.4. Esto es debido a que todos los puntos interiores tienen puntos adyacentes a su alrededor que permiten aplicar las fórmulas de diferencias centradas (3-44) y (3-45). Sin embargo, para poder aplicar las condiciones de contorno (3-38) y (3-39) en puntos del contorno en la Figura 3.4 (puntos verdes, rojos y las esquinas gris, naranja y rosa) se requieren fórmulas de diferencias regresivas y progresivas para las derivadas primeras.

Asimismo, y para conservar el mismo orden de aproximación utilizado en (3-44) y (3-45) se utilizarán fórmulas de diferencias regresivas y progresivas que sean obtenidas en el mismo orden. Dado que, en las expresiones (3-38) y (3-39), aparecen derivadas primeras, será necesario obtener fórmulas que permitan calcular dichas derivadas. Para estimar la primera derivada, se parte del siguiente desarrollo de Taylor a segundo orden:

$$f(p_{i+1}) \approx f(p_i) + \Delta f'(p_i) + \frac{1}{2} \Delta^2 f''(p_i) \quad (3-46)$$



Para despejar la primera derivada será necesario tener una fórmula en diferencias progresiva para la derivada segunda que aparece en (3-46). Para obtenerla, se utilizará el siguiente desarrollo de Taylor hasta segundo orden:

$$f(p_i + 2\Delta) = f(p_{i+2}) \approx f(p_i) + 2\Delta f'(p_i) + 2\Delta^2 f''(p_i) \quad (3-47)$$

Multiplicando (3-46) por 2 y restándola a (3-47) se obtiene:

$$f(p_{i+2}) - 2f(p_{i+1}) \approx -f(p_i) + \Delta^2 f''(p_i)$$

Y despejando:

$$f''(p_i) \approx \frac{f(p_{i+2}) - 2f(p_{i+1}) + f(p_i)}{\Delta^2} \quad (3-48)$$

Finalmente, sustituyendo (3-48) en (3-46) y reagrupando:

$$\begin{aligned} f(p_{i+1}) &\approx f(p_i) + \Delta f'(p_i) + \frac{1}{2}\Delta^2 \left( \frac{f(p_{i+2}) - 2f(p_{i+1}) + f(p_i)}{\Delta^2} \right) \\ &= \frac{3}{2}f(p_i) - f(p_{i+1}) + \frac{1}{2}f(p_{i+2}) + \Delta f'(p_i) \end{aligned}$$

Y despejando la derivada primera:

$$f'(p_i) \approx \frac{(4f(p_{i+1}) - 3f(p_i) - f(p_{i+2}))}{2\Delta} \quad (3-49)$$

Análogamente, se tienen expresiones similares a (3-46) y (3-47) en su versión regresiva:

$$f(p_{i-1}) \approx f(p_i) - \Delta f'(p_i) + \frac{1}{2}\Delta^2 f''(p_i) \quad (3-50)$$

$$f(p_{i-2}) \approx f(p_i) - 2\Delta f'(p_i) + 2\Delta^2 f''(p_i) \quad (3-51)$$

Multiplicando (3-50) por 2 y restándola a (3-51), se obtiene:

$$f(p_{i-2}) - 2f(p_{i-1}) \approx -f(p_i) + \Delta^2 f''(p_i)$$

Que despejando:

$$f''(p_i) \approx \frac{f(p_{i-2}) - 2f(p_{i-1}) + f(p_i)}{\Delta^2} \quad (3-52)$$

A su vez, sustituyendo (3-52) en (3-50):

$$\begin{aligned} f(p_{i-1}) &\approx f(p_i) - \Delta f'(p_i) + \frac{1}{2}\Delta^2 \left( \frac{f(p_{i-2}) - 2f(p_{i-1}) + f(p_i)}{\Delta^2} \right) \\ &= \frac{3}{2}f(p_i) - f(p_{i-1}) + \frac{1}{2}f(p_{i-2}) - \Delta f'(p_i) \end{aligned}$$

Y despejando la derivada primera:

$$f'(p_i) \approx \frac{(f(p_{i-2}) - 4f(p_{i-1}) + 3f(p_i))}{2\Delta} \quad (3-53)$$

Despreciando los errores de aproximación en (3-49) y (3-53) y sustituyendo la notación para la derivada primera por un subíndice, se tiene en su versión discreta:

$$f_{,p} = \frac{(4f_{i+1} - 3f_i - f_{i+2})}{2\Delta} \quad (3-54)$$

$$f_{,p} = \frac{(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)}{2\Delta} \quad (3-55)$$

Las expresiones (3-54) y (3-55) constituyen fórmulas en diferencias progresivas y regresivas respectivamente que permiten calcular numéricamente derivadas primeras de las componentes de los campos de desplazamientos que sólo tengan puntos contiguos por delante o puntos contiguos por detrás respectivamente. Ejemplos de estos puntos, son los puntos verdes en la Figura 3.4 a la hora de calcular sus derivadas primeras con respecto a 'z' o la derivada primera con respecto a 'y' y 'z' de la esquina superior naranja.

Conviene notar que existen puntos que tienen contiguos tanto arriba como abajo, o a izquierda y derecha, en los que las condiciones de contorno obligan a evaluar derivadas primeras. Ejemplos de estos casos son, de nuevo en la Figura 3.4, los puntos verdes, a la hora de calcular las derivadas primeras respecto de 'y' o los puntos rojos a la hora de calcular las derivadas primeras respecto de 'z'. Para calcular estas derivadas primeras, se obtiene una fórmula de diferencias finitas partiendo de los siguientes desarrollos de Taylor hasta orden dos:

$$f(p_i + \Delta) = f(p_{i+1}) \approx f(p_i) + \Delta f'(p_i) + \frac{1}{2} \Delta^2 f''(p_i)$$

$$f(p_i - \Delta) = f(p_{i-1}) \approx f(p_i) - \Delta f'(p_i) + \frac{1}{2} \Delta^2 f''(p_i)$$

Restando ambas expresiones se tiene:

$$f(p_{i+1}) - f(p_{i-1}) \approx 2\Delta f'(p_i)$$

Despejando la derivada primera:

$$f'(p_i) = \frac{(f(p_{i+1}) - f(p_{i-1})))}{2\Delta} + O(\Delta^2)$$

Y, despreciando el error y adoptando la notación con subíndices para la derivada primera:

$$f_p = \frac{(f_{i+1} - f_{i-1}))}{2\Delta} \quad (3-56)$$

Que es una fórmula de aproximación para la derivada primera en diferencias finitas centradas. Se observa que tanto (3-54) y (3-55) como (3-56) son fórmulas que permiten calcular la derivada primera. Sin embargo, el número de evaluaciones que requiere (3-56) es menor que el número de evaluaciones que requiere el uso de (3-54) y (3-55). Por este motivo, siempre que el punto sobre el que se quiera calcular la derivada primera tenga puntos contiguos arriba y abajo (o a izquierda y derecha) se utilizará la fórmula (3-56).

### Discretización de las ecuaciones de campo y condiciones de contorno

Una vez que tenemos un dominio discretizado según (3-43) queda sustituir en las ecuaciones de campo (3-37) y en las condiciones de contorno (3-38) y (3-39), las fórmulas de aproximación para las derivadas primeras y segundas y obtener así un esquema de diferencias finitas que puede resolverse para obtener el campo de desplazamientos.

La formulación que se ha seguido ha permitido considerar como incógnitas las componentes del campo de desplazamientos. Por este motivo, se tienen tantas incógnitas como puntos tenga el dominio discretizado multiplicadas por tres (ya que existen tres componentes del campo de desplazamientos).

Tomando como referencia la Figura 3.4, los puntos interiores del dominio (puntos negros, amarillos, azules y el punto morado) deberán verificar las ecuaciones de campo (3-37). Para obtener las ecuaciones de campo que deben verificar los puntos negros  $(j, s)$ , se debe notar

que todos ellos tienen puntos contiguos arriba, abajo, a izquierda y derecha y, por tanto, se podrán discretizar las ecuaciones, utilizando las fórmulas de diferencias centradas (3-44) y (3-45) sustituidas en (3-37). Así:

$$\begin{aligned}
& \frac{\overline{C_{26}}}{k^2} (V_{j+1,s} - 2V_{j,s} + V_{j-1,s}) \\
& + \frac{(\overline{C_{36}} + \overline{C_{45}})}{4kq} (W_{j+1,s+1} - W_{j+1,s-1} - W_{j-1,s+1} + W_{j-1,s-1}) \\
& + \frac{\overline{C_{66}}}{k^2} (U_{j+1,s} - 2U_{j,s} + U_{j-1,s}) + \frac{\overline{C_{45}}}{q^2} (V_{j,s+1} - 2V_{j,s} + V_{j,s-1}) \\
& + \frac{\overline{C_{55}}}{q^2} (U_{j,s+1} - 2U_{j,s} + U_{j,s-1}) = 0 \\
\\
& \frac{\overline{C_{22}}}{k^2} (V_{j+1,s} - 2V_{j,s} + V_{j-1,s}) \\
& + \frac{(\overline{C_{23}} + \overline{C_{44}})}{4kq} (W_{j+1,s+1} - W_{j+1,s-1} - W_{j-1,s+1} + W_{j-1,s-1}) \\
& + \frac{\overline{C_{26}}}{k^2} (U_{j+1,s} - 2U_{j,s} + U_{j-1,s}) + \frac{\overline{C_{44}}}{q^2} (V_{j,s+1} - 2V_{j,s} + V_{j,s-1}) \\
& + \frac{\overline{C_{45}}}{q^2} (U_{j,s+1} - 2U_{j,s} + U_{j,s-1}) = 0 \\
\\
& \frac{\overline{C_{44}}}{k^2} (W_{j+1,s} - 2W_{j,s} + W_{j-1,s}) \\
& + \frac{(\overline{C_{45}} + \overline{C_{36}})}{4kq} (U_{j+1,s+1} - U_{j+1,s-1} - U_{j-1,s+1} + U_{j-1,s-1}) \\
& + \frac{(\overline{C_{23}} + \overline{C_{44}})}{4kq} (V_{j+1,s+1} - V_{j+1,s-1} - V_{j-1,s+1} + V_{j-1,s-1}) \\
& + \frac{\overline{C_{33}}}{q^2} (W_{j,s+1} - 2W_{j,s} + W_{j,s-1}) = 0
\end{aligned} \tag{3-57}$$

En cuanto a los puntos amarillos y azules, se debe notar que son puntos interiores del dominio y, por tanto, deberán satisfacer las mismas ecuaciones de campo. Sin embargo, estos puntos (tras haber reducido por simetría el dominio de interés) no tienen puntos por debajo en el caso de los amarillos, o puntos a la izquierda en el caso de los azules. Así, para los puntos amarillos ( $j, s = 0$ ), las condiciones (3-32) se escriben:

$$\begin{aligned}
U_{j,s+1} &= U_{j,s-1} \\
V_{j,s+1} &= V_{j,s-1} \\
W_{j,s} &= 0; \quad W_{j,s+1} = -W_{j,s-1}
\end{aligned}$$

Por lo que las ecuaciones (3-57) adoptan la siguiente forma para los puntos amarillos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\overline{C_{26}}}{k^2} (V_{j+1,s} - 2V_{j,s} + V_{j-1,s}) + \frac{2(\overline{C_{36}} + \overline{C_{45}})}{4kq} (W_{j+1,s+1} - W_{j-1,s+1}) \\
& + \frac{\overline{C_{66}}}{k^2} (U_{j+1,s} - 2U_{j,s} + U_{j-1,s}) + \frac{2\overline{C_{45}}}{q^2} (V_{j,s+1} - V_{j,s}) \\
& + \frac{2\overline{C_{55}}}{q^2} (U_{j,s+1} - U_{j,s}) = 0 \\
\\
& \frac{\overline{C_{22}}}{k^2} (V_{j+1,s} - 2V_{j,s} + V_{j-1,s}) + \frac{2(\overline{C_{23}} + \overline{C_{44}})}{4kq} (W_{j+1,s+1} - W_{j-1,s+1}) \\
& + \frac{\overline{C_{26}}}{k^2} (U_{j+1,s} - 2U_{j,s} + U_{j-1,s}) + \frac{2\overline{C_{44}}}{q^2} (V_{j,s+1} - V_{j,s}) \\
& + \frac{2\overline{C_{45}}}{q^2} (U_{j,s+1} - U_{j,s}) = 0 \\
\\
& W_{j,s} = 0
\end{aligned} \tag{3-58}$$

Por otro lado, las condiciones (3-33) y (3-34) para los puntos azules ( $j = 0, s$ ) serán:

$$\begin{aligned}
U_{j,s} &= 0; \quad U_{j+1,s} = -U_{j-1,s} \\
V_{j,s} &= 0; \quad V_{j+1,s} = -V_{j-1,s} \\
W_{j+1,s} &= W_{j-1,s}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3-57), se tendrá:

$$\begin{aligned}
& U_{j,s} = 0 \\
\\
& V_{j,s} = 0 \\
\\
& \frac{2\overline{C_{44}}}{k^2} (W_{j+1,s} - W_{j,s}) + \frac{2(\overline{C_{45}} + \overline{C_{36}})}{4kq} (U_{j+1,s+1} - U_{j+1,s-1}) \\
& + \frac{2(\overline{C_{23}} + \overline{C_{44}})}{4kq} (V_{j+1,s+1} - V_{j+1,s-1}) \\
& + \frac{\overline{C_{33}}}{q^2} (W_{j,s+1} - 2W_{j,s} + W_{j,s-1}) = 0
\end{aligned} \tag{3-59}$$

En cuanto a los puntos del contorno (rojos y verdes), deben cumplir las condiciones de contorno (3-38) y (3-39) respectivamente. En el caso de los puntos rojos ( $j = m, s$ ), se utiliza la fórmula (3-55) para las derivadas con respecto a 'y' y la fórmula (3-56) para las derivadas con respecto a 'z'. Así, sustituyendo estas derivadas en las ecuaciones (3-38):

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{C_{22}}}{2k} (V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s}) + \frac{\overline{C_{23}}}{2q} (W_{j,s+1} - W_{j,s-1}) + \frac{\overline{C_{26}}}{2k} (U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s}) \\ & = -\overline{C_{12}}C \\ & \frac{\overline{C_{44}}}{2k} (W_{j-2,s} - 4W_{j-1,s} + 3W_{j,s}) + \frac{\overline{C_{44}}}{2q} (V_{j,s+1} - V_{j,s-1}) + \frac{\overline{C_{45}}}{2q} (U_{j,s+1} - U_{j,s-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3-60)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{C_{26}}}{2k} (V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s}) + \frac{\overline{C_{36}}}{2q} (W_{j,s+1} - W_{j,s-1}) + \frac{\overline{C_{66}}}{2k} (U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s}) \\ & = -\overline{C_{16}}C \end{aligned}$$

En cuanto a los puntos verdes ( $j, s = n$ ), se utiliza la fórmula (3-55) para las derivadas con respecto a 'z' y la fórmula (3-56) para las derivadas con respecto a 'y'. Así, sustituyendo estas derivadas en las ecuaciones (3-39):

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{C_{23}}}{2k} (V_{j+1,s} - V_{j-1,s}) + \frac{\overline{C_{33}}}{2q} (W_{j,s-2} - 4W_{j,s-1} + 3W_{j,s}) + \frac{\overline{C_{36}}}{2k} (U_{j+1,s} - U_{j-1,s}) \\ & = -\overline{C_{13}}C \\ & \frac{\overline{C_{44}}}{2k} (W_{j+1,s} - W_{j-1,s}) + \frac{\overline{C_{44}}}{2q} (V_{j,s-2} - 4V_{j,s-1} + 3V_{j,s}) + \frac{\overline{C_{45}}}{2q} (U_{j,s-2} - 4U_{j,s-1} + 3U_{j,s}) \\ & = 0 \\ & \frac{\overline{C_{45}}}{2k} (W_{j+1,s} - W_{j-1,s}) + \frac{\overline{C_{45}}}{2q} (V_{j,s-2} - 4V_{j,s-1} + 3V_{j,s}) + \frac{\overline{C_{55}}}{2q} (U_{j,s-2} - 4U_{j,s-1} + 3U_{j,s}) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3-61)$$

En cuanto a los puntos de las esquinas se tiene, en primer lugar, que el punto morado ( $j = 0; s = 0$ ) debe verificar la condición de sólido rígido (3-34):

$$\begin{aligned} U_{j,s} &= 0 \\ V_{j,s} &= 0 \\ W_{j,s} &= 0 \end{aligned} \quad (3-62)$$

El punto rosa ( $j = m, s = 0$ ) debe satisfacer las mismas ecuaciones que los puntos rojos. La única diferencia consistirá en aplicar las condiciones de simetría (3-32). Con esto:

$$\frac{\overline{C_{22}}}{2k} (V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s}) + \frac{\overline{C_{23}}}{q} W_{j,s+1} + \frac{\overline{C_{26}}}{2k} (U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s}) = -\overline{C_{12}}C \quad (3-63)$$

$$W_{j,s} = 0$$

$$\frac{\overline{C}_{26}}{2k}(V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s}) + \frac{\overline{C}_{36}}{q}W_{j,s+1} + \frac{\overline{C}_{66}}{2k}(U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s}) = -\overline{C}_{16}C$$

Para el punto gris ( $j = 0, s = n$ ), se utilizarán las ecuaciones (3-39) además de las condiciones de simetría (3-33):

$$\frac{\overline{C}_{23}}{k}V_{j+1,s} + \frac{\overline{C}_{33}}{2q}(W_{j,s-2} - 4W_{j,s-1} + 3W_{j,s}) + \frac{\overline{C}_{36}}{k}U_{j+1,s} = -\overline{C}_{13}C$$

$$U_{j,s} = 0 \quad (3-64)$$

$$V_{j,s} = 0$$

Y, finalmente, el punto naranja ( $j = m, s = n$ ) debe satisfacer o bien las condiciones de contorno (3-38) o bien las condiciones (3-39). Ambos grupos de condiciones de contorno suman un total de seis ecuaciones. Evidentemente, para no sobredeterminar el sistema, sólo se podrá exigir el cumplimiento de uno de los dos grupos de condiciones de contorno o bien una combinación de ecuaciones de las condiciones (3-38) y las condiciones (3-39) que conformen un grupo de tres ecuaciones en total. El primer grupo de ecuaciones que responde a las condiciones (3-38) son las mismas que las que se escribieron para los puntos rojos con la diferencia de que este punto no tiene contiguos ni arriba ni a la derecha por lo que habrá que hacer uso de la fórmula (3-55) convenientemente:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{C}_{22}}{2k}(V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s}) + \frac{\overline{C}_{23}}{2q}(W_{j,s-2} - 4W_{j,s-1} + 3W_{j,s}) \\ + \frac{\overline{C}_{26}}{2k}(U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s}) = -\overline{C}_{12}C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{C}_{44}}{2k}(W_{j-2,s} - 4W_{j-1,s} + 3W_{j,s}) + \frac{\overline{C}_{44}}{2q}(V_{j,s-2} - 4V_{j,s-1} + 3V_{j,s}) \\ + \frac{\overline{C}_{45}}{2q}(U_{j,s-2} - 4U_{j,s-1} + 3U_{j,s}) = 0 \end{aligned} \quad (3-65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{C}_{26}}{2k}(V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s}) + \frac{\overline{C}_{36}}{2q}(W_{j,s-2} - 4W_{j,s-1} + 3W_{j,s}) \\ + \frac{\overline{C}_{66}}{2k}(U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s}) = -\overline{C}_{16}C \end{aligned}$$

El segundo bloque de ecuaciones correspondiente a las condiciones (3-39), se escribe:

$$\begin{aligned}
& \frac{\overline{C_{23}}}{2k} (V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s}) + \frac{\overline{C_{33}}}{2q} (W_{j,s-2} - 4W_{j,s-1} + 3W_{j,s}) \\
& + \frac{\overline{C_{36}}}{2k} (U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s}) = -\overline{C_{13}}C \\
& \frac{\overline{C_{44}}}{2k} (W_{j-2,s} - 4W_{j-1,s} + 3W_{j,s}) + \frac{\overline{C_{44}}}{2q} (V_{j,s-2} - 4V_{j,s-1} + 3V_{j,s}) \\
& + \frac{\overline{C_{45}}}{2q} (U_{j,s-2} - 4U_{j,s-1} + 3U_{j,s}) = 0 \\
& \frac{\overline{C_{45}}}{2k} (W_{j-2,s} - 4W_{j-1,s} + 3W_{j,s}) + \frac{\overline{C_{45}}}{2q} (V_{j,s-2} - 4V_{j,s-1} + 3V_{j,s}) \\
& + \frac{\overline{C_{55}}}{2q} (U_{j,s-2} - 4U_{j,s-1} + 3U_{j,s}) = 0
\end{aligned} \tag{3-66}$$

### Recuperación de deformaciones y tensiones

Una vez resuelto el sistema algebraico, se tendrán disponibles las componentes del campo de desplazamientos en los puntos discretos del dominio considerado. Para obtener las deformaciones y tensiones, se utilizarán las fórmulas de derivación para las primeras derivadas (3-55) y (3-56) sustituidas convenientemente en las relaciones (3-15). Éstas últimas adquieren la siguiente forma al sustituir las formas para los desplazamientos (3-30):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= C \\
\varepsilon_y &= V_{,y} \\
\varepsilon_z &= W_{,z} \\
\gamma_{yz} &= V_{,z} + W_{,y} \\
\gamma_{xz} &= U_{,z} \\
\gamma_{xy} &= U_{,y}
\end{aligned} \tag{3-67}$$

De nuevo, la elección de las fórmulas para aproximar las derivadas primeras depende de la posición de los puntos en el esquema de la Figura 3.4. Para los puntos negros, usando la fórmula (3-56) para aproximar las derivadas, se tiene:

$$\varepsilon_x = C \tag{3-68}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{(V_{j+1,s} - V_{j-1,s})}{2k} \\ \varepsilon_z &= \frac{(W_{j,s+1} - W_{j,s-1})}{2q} \\ \gamma_{yz} &= \frac{(V_{j,s+1} - V_{j,s-1})}{2q} + \frac{(W_{j+1,s} - W_{j-1,s})}{2k} \\ \gamma_{xz} &= \frac{(U_{j,s+1} - U_{j,s-1})}{2q} \\ \gamma_{xy} &= \frac{(U_{j+1,s} - U_{j-1,s})}{2k}\end{aligned}$$

Para los puntos amarillos, se emplearán la fórmula (3-56) para las derivadas y las condiciones de simetría (3-32) para reducir las derivadas con respecto a 'z':

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= C \\ \varepsilon_y &= \frac{(V_{j+1,s} - V_{j-1,s})}{2k} \\ \varepsilon_z &= \frac{W_{j,s+1}}{q} \\ \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{(U_{j+1,s} - U_{j-1,s})}{2k}\end{aligned}\tag{3-69}$$

Para los puntos azules, se utilizan la fórmula (3-56) y las condiciones de simetría (3-33) y (3-34):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= C \\ \varepsilon_y &= \frac{V_{j+1,s}}{k} \\ \varepsilon_z &= \frac{(W_{j,s+1} - W_{j,s-1})}{2q} \\ \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{U_{j+1,s}}{k}\end{aligned}\tag{3-70}$$

Para los puntos rojos, la fórmula (3-55) para las derivadas primeras con respecto a 'y' y la fórmula (3-56) para las derivadas con respecto a 'z':

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= C \\
 \varepsilon_y &= \frac{(V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s})}{2k} \\
 \varepsilon_z &= \frac{(W_{j,s+1} - W_{j,s-1})}{2q} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{(V_{j,s+1} - V_{j,s-1})}{2q} + \frac{(W_{j-2,s} - 4W_{j-1,s} + 3W_{j,s})}{2k} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{(U_{j,s+1} - U_{j,s-1})}{2q} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{(U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s})}{2k}
 \end{aligned} \tag{3-71}$$

Para los puntos verdes, se emplea la fórmula (3-55) para las derivadas primeras con respecto a 'z' y la fórmula (3-56) para las derivadas con respecto a 'y':

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= C \\
 \varepsilon_y &= \frac{(V_{j+1,s} - V_{j-1,s})}{2k} \\
 \varepsilon_z &= \frac{(W_{j,s-2} - 4W_{j,s-1} + 3W_{j,s})}{2q} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{(V_{j,s-2} - 4V_{j,s-1} + 3V_{j,s})}{2q} + \frac{(W_{j+1,s} - W_{j-1,s})}{2k} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{(U_{j,s-2} - 4U_{j,s-1} + 3U_{j,s})}{2q} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{(U_{j+1,s} - U_{j-1,s})}{2k}
 \end{aligned} \tag{3-72}$$

Para el punto morado, se utiliza la fórmula (3-56) para las derivadas y las condiciones de simetría (3-32) y (3-33):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= C \\
 \varepsilon_y &= \frac{V_{j+1,s}}{k}
 \end{aligned} \tag{3-73}$$

$$\varepsilon_z = \frac{W_{j,s+1}}{q}$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{U_{j+1,s}}{k}$$

Para el punto rosa, la fórmula (3-55) para las derivadas primeras con respecto a 'y', la fórmula (3-56) para las derivadas con respecto a 'z' y las condiciones de simetría (3-32):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= C \\ \varepsilon_y &= \frac{(V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s})}{2k} \\ \varepsilon_z &= \frac{W_{j,s+1}}{q} \\ \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{(U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s})}{2k}\end{aligned}\tag{3-74}$$

Mientras que para el punto gris, se emplea la fórmula (3-55) para las derivadas primeras con respecto a 'z', la fórmula (3-56) para las derivadas con respecto a 'y' y las condiciones de simetría (3-33) y (3-34):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= C \\ \varepsilon_y &= \frac{V_{j+1,s}}{k} \\ \varepsilon_z &= \frac{(W_{j,s-2} - 4W_{j,s-1} + 3W_{j,s})}{2q} \\ \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{U_{j+1,s}}{k}\end{aligned}\tag{3-75}$$

Y, por último, para el punto naranja, se utilizará la fórmula (3-55) para las derivadas primeras con respecto a 'y' y 'z':

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= C \\
\varepsilon_y &= \frac{(V_{j-2,s} - 4V_{j-1,s} + 3V_{j,s})}{2k} \\
\varepsilon_z &= \frac{(W_{j,s-2} - 4W_{j,s-1} + 3W_{j,s})}{2q} \\
\gamma_{yz} &= \frac{(V_{j,s-2} - 4V_{j,s-1} + 3V_{j,s})}{2q} + \frac{(W_{j-2,s} - 4W_{j-1,s} + 3W_{j,s})}{2k} \\
\gamma_{xz} &= \frac{(U_{j,s-2} - 4U_{j,s-1} + 3U_{j,s})}{2q} \\
\gamma_{xy} &= \frac{(U_{j-2,s} - 4U_{j-1,s} + 3U_{j,s})}{2k}
\end{aligned} \tag{3-76}$$

Una vez que se obtienen las deformaciones, se podrán calcular por lámina, mediante la ley de comportamiento (3-11), las componentes del tensor de tensiones en cada uno de los puntos discretizados del dominio de interés.

### 3.5. Esquema del método

Con todo lo anterior, se puede construir un sistema algebraico cuyas soluciones son las componentes del campo de desplazamiento en los puntos discretos de la malla. Se tienen tantas ecuaciones como el número de puntos que tenga el dominio multiplicado por tres. Las ecuaciones que lleva asociado cada uno de los puntos, dependen de la posición que tenga en el esquema de la Figura 3.4. Cada color lleva asociado una tripleta de ecuaciones distintas.

Todas las ecuaciones se recogen en un sistema algebraico del tipo  $A d = b$  que puede ser resuelto invirtiendo la matriz  $A$ . Evidentemente el coste computacional de esta inversión es tanto más elevado cuanto más llena sea la matriz  $A$ . Por este motivo, ordenar las ecuaciones de forma que la matriz  $A$  se parezca lo más posible a una matriz banda es la estrategia que se sigue.

Aunque existen multitud de maneras de numerar los puntos en el esquema de diferencias finitas que se ha construido, el orden de numeración que se establece será el mismo que en el ejemplo mostrado en la siguiente figura:

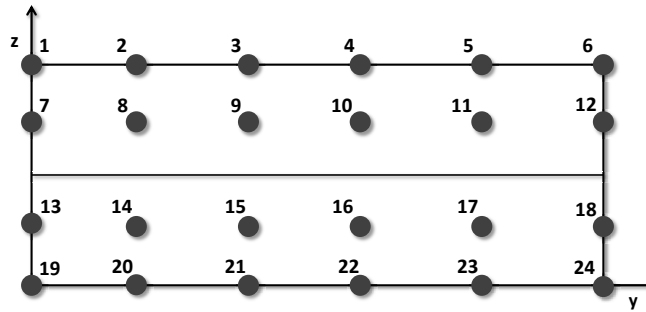


Figura 3.5. Estrategia de numeración para el esquema de diferencias finitas

De esta manera, estableciendo como referencia el esquema de numeración del ejemplo de la figura anterior, se tiene un sistema  $A d = b$  con los siguientes elementos:

- Un vector de incógnitas:

$$d = \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \dots \\ U_{24} \\ V_{24} \\ W_{24} \end{pmatrix}$$

- Una matriz  $A$  que contiene los coeficientes que multiplican a cada una de las incógnitas y que están expuestos en las ecuaciones de (3-57) a (3-65) o (3-66).
- Y un vector  $b$  que contiene los términos independientes, descritos nuevamente en las ecuaciones de (3-57) a (3-65) o (3-66).

Conviene notar que la estructura del sistema algebraico de ecuaciones a resolver se puede escribir también:

$$A \begin{pmatrix} d \\ \varepsilon_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \varepsilon_x \end{pmatrix}$$

Dada la estructura del vector  $b$  se tiene:

$$\frac{b}{\varepsilon_x} \neq f(\varepsilon_x)$$

Esto implica que se pueden obtener los desplazamientos, deformaciones y tensiones por unidad de deformación, multiplicándolas posteriormente por la deformación axial concreta correspondiente a la condición de contorno del problema que se esté resolviendo.

Por último, y para relacionar el índice  $i$  que indica la numeración dada a cada punto (Figura 3.5) con los índices  $j$  y  $s$  que hacen referencia a la discretización definida en (3-43), se utiliza la siguiente relación:

$$i = (m + 1) * (n - s) + (j + 1) \quad (3-77)$$

Con todo lo anterior, el esquema de resolución debe incluir los siguientes pasos:

- Discretizar el dominio con un esquema como el mostrado en la Figura 3.4, fijando los valores de  $m$ ,  $n$ ,  $k$  y  $q$ .
- Utilizar (3-77) para relacionar  $j$  y  $s$  con el índice de numeración  $i$  que permite ordenar las ecuaciones siguiendo un esquema similar al mostrado en la Figura 3.5.
- Rellenar las entradas de la matriz  $A$  con los coeficientes que tendría cada incógnita dados en la tripleta de ecuaciones correspondiente al color que tenga cada punto en cuestión. Para los puntos negros se deben utilizar las ecuaciones (3-57), para los puntos amarillos y azules las ecuaciones (3-58) y (3-59) respectivamente y para los puntos rojos y verdes las ecuaciones (3-60) y (3-61). Para los puntos morado y rosa, se deben utilizar las ecuaciones (3-62) y (3-63) mientras que para el punto gris las ecuaciones (3-64). Por último, para el punto naranja, se deben utilizar las ecuaciones (3-65) o (3-66).
- Introducir los términos independientes ordenados en el vector  $b$ .
- Invertir el sistema y obtener el campo de desplazamientos en cada uno de los puntos discretos a los que se ha reducido el dominio de interés.
- Obtener las deformaciones en cada uno de los puntos mediante las ecuaciones (3-68) a (3-76).
- Obtener las tensiones en cada uno de los puntos del dominio a través de la ley de comportamiento (3-11).

### 3.6. Análisis de sensibilidad de malla

En este apartado se realizará un estudio de sensibilidad de malla. Se pretende evaluar cómo afecta la consideración de mallas construidas con más o menos puntos a la forma de la solución obtenida. Los resultados que se mostrarán son los correspondientes a un laminado de relación geométrica  $R = 8$  y cuyas propiedades mecánicas han sido tomadas de [19]. Dichas propiedades se muestran en la siguiente tabla:

$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ $E_{33}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ $G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}$ $\nu_{13}$ $\nu_{23}$
137.9	14.5	5.86	5.86	0.21

**Tabla 3-1. Propiedades mecánicas del material utilizado en el análisis de sensibilidad de malla [19]**

Los resultados que se muestran en las siguientes figuras, representan los valores de las tensiones  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_z$  (por unidad de deformación axial) a lo largo del semiancho del laminado a la altura de la interfase y a lo largo del espesor en el borde libre respectivamente. En primer lugar, se presentan los resultados para un laminado  $[-45^\circ, 45^\circ]_s$ :

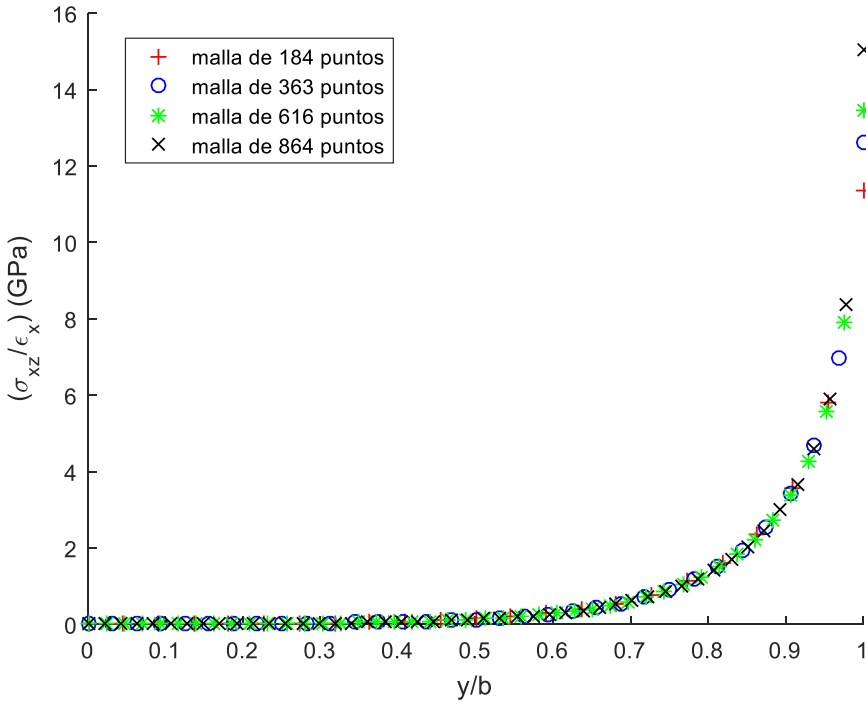


Figura 3.6. Tensión  $\sigma_{xz}$  a través del semiancho en la interfase para distintas mallas

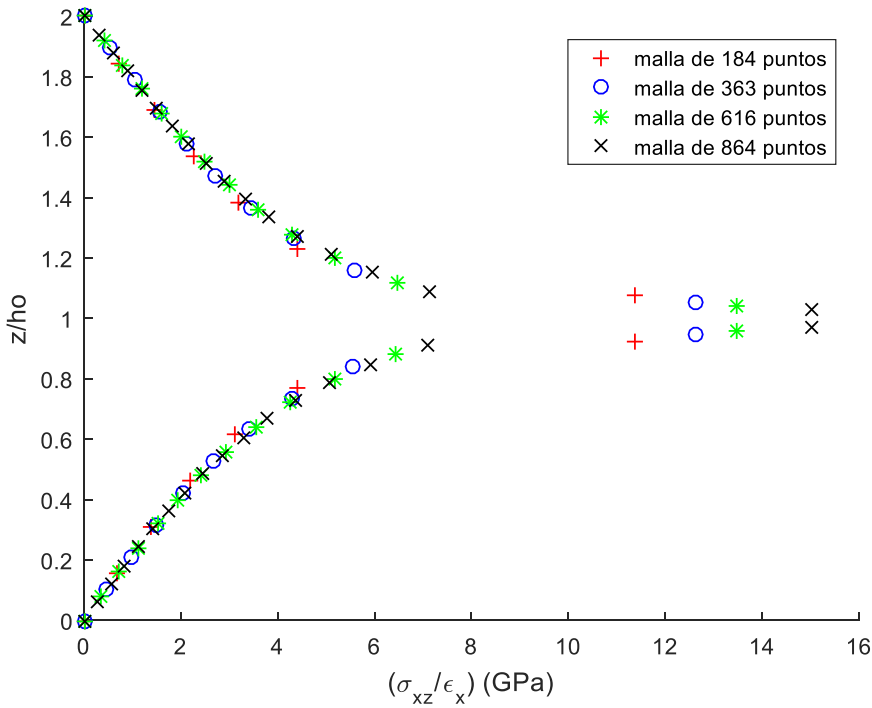


Figura 3.7. Tensión  $\sigma_{xz}$  a través del espesor en el borde libre para distintas mallas



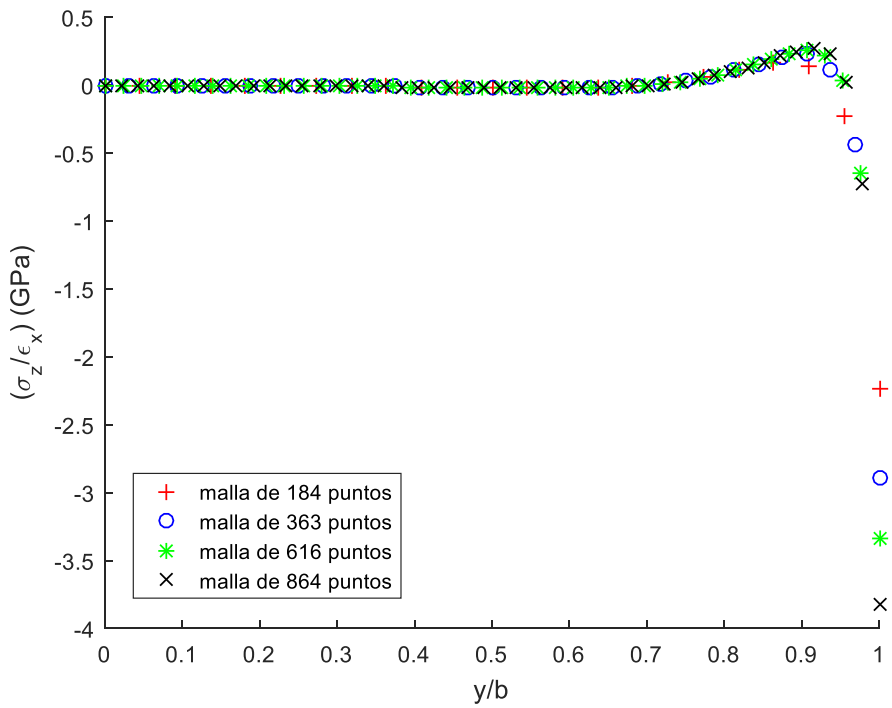


Figura 3.8. Tensión  $\sigma_z$  a través del semiancho en la interfase para distintas mallas

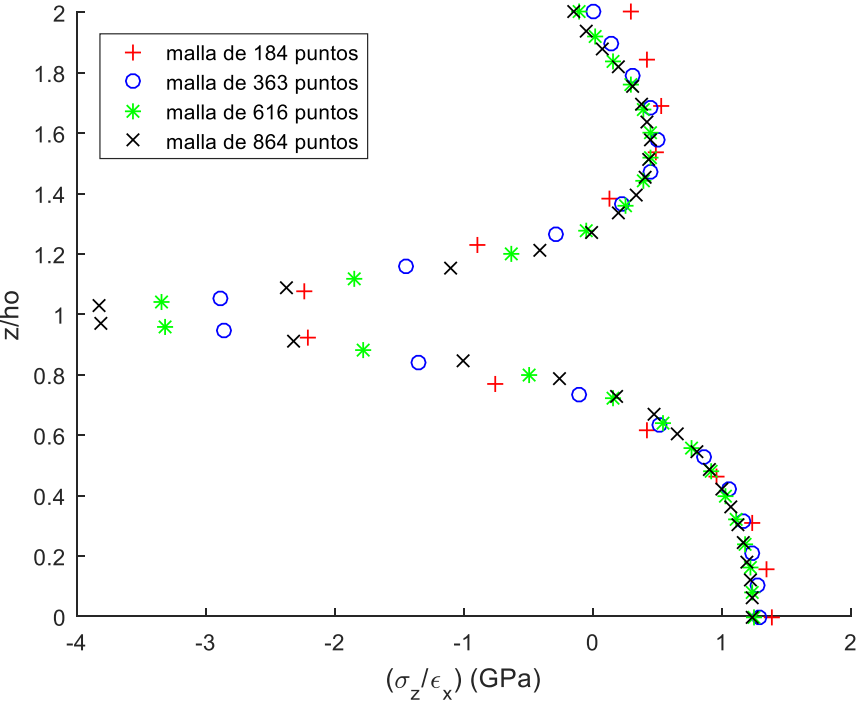


Figura 3.9. Tensión  $\sigma_z$  a través del espesor en el borde libre para distintas mallas

En segundo lugar, se muestran los resultados para un laminado  $[0^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 45^\circ]_s$  para distintas mallas del dominio de interés:

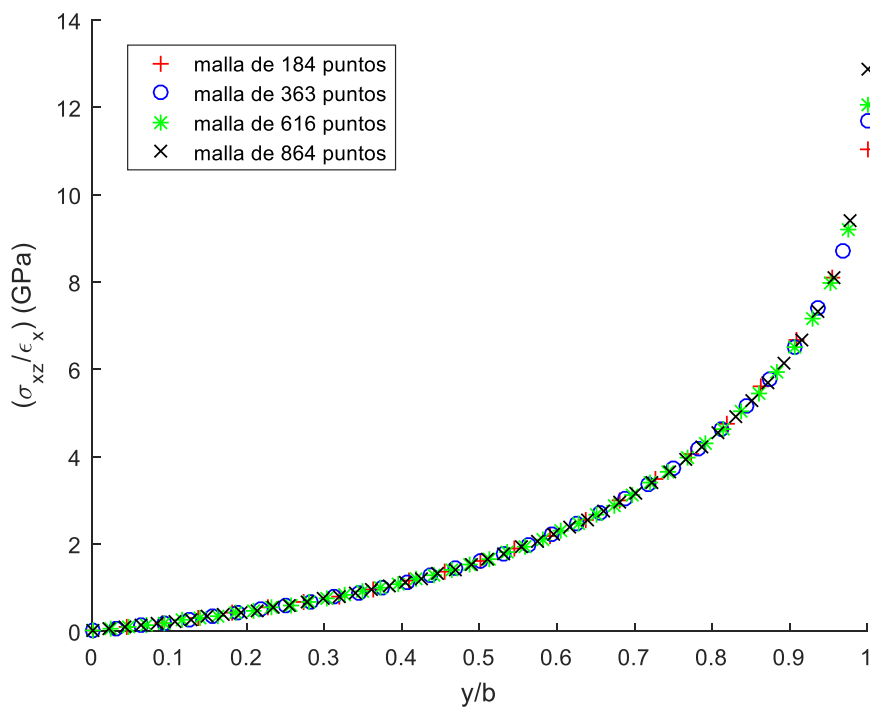


Figura 3.10. Tensión  $\sigma_{xz}$  a través del semiancho en la interfase más cercana al plano de simetría para distintas mallas

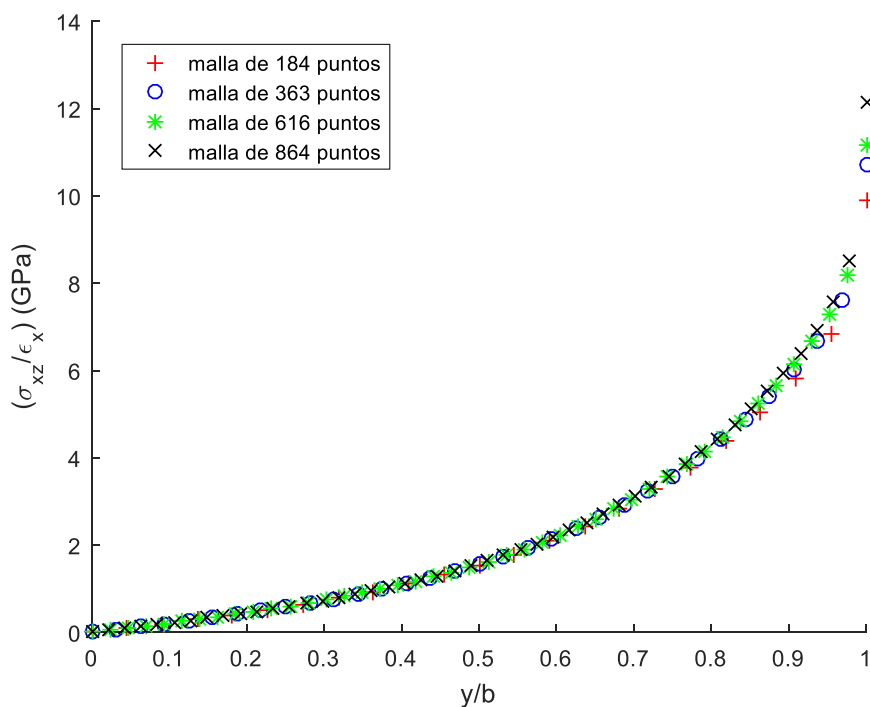


Figura 3.11. Tensión  $\sigma_{xz}$  a través del semiancho en la interfase intermedia para distintas mallas

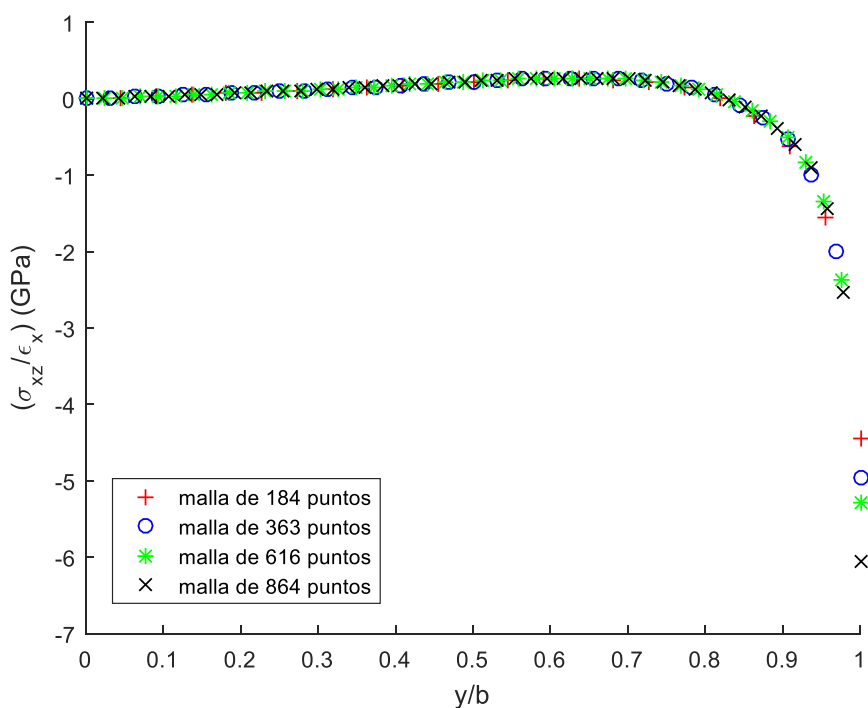


Figura 3.12. Tensión  $\sigma_{xz}$  a través del semiancho en la interfase más lejana al plano de simetría

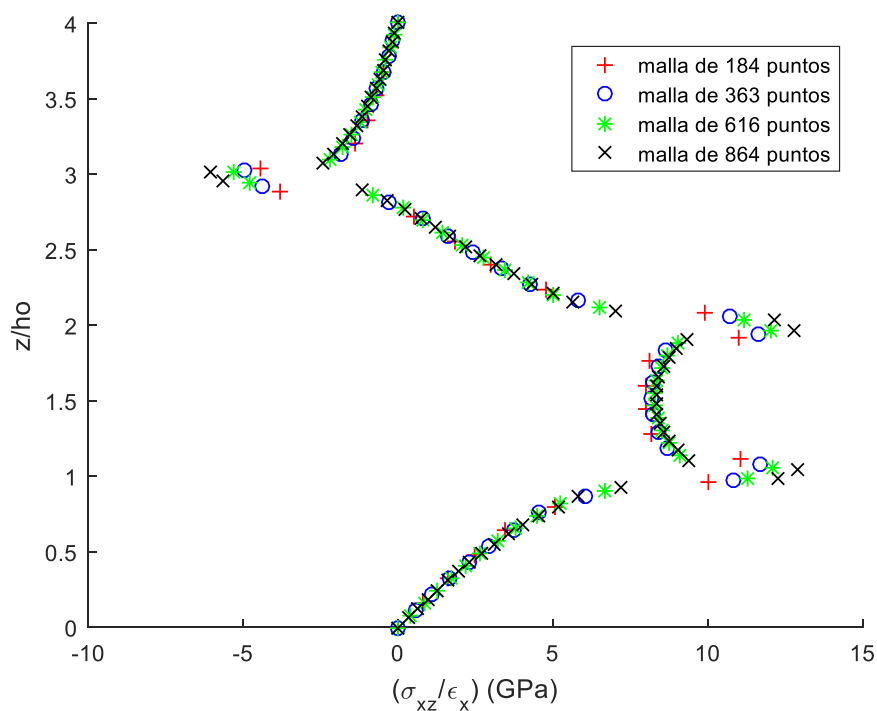


Figura 3.13. Tensión  $\sigma_{xz}$  a través del espesor en el borde libre para distintas mallas

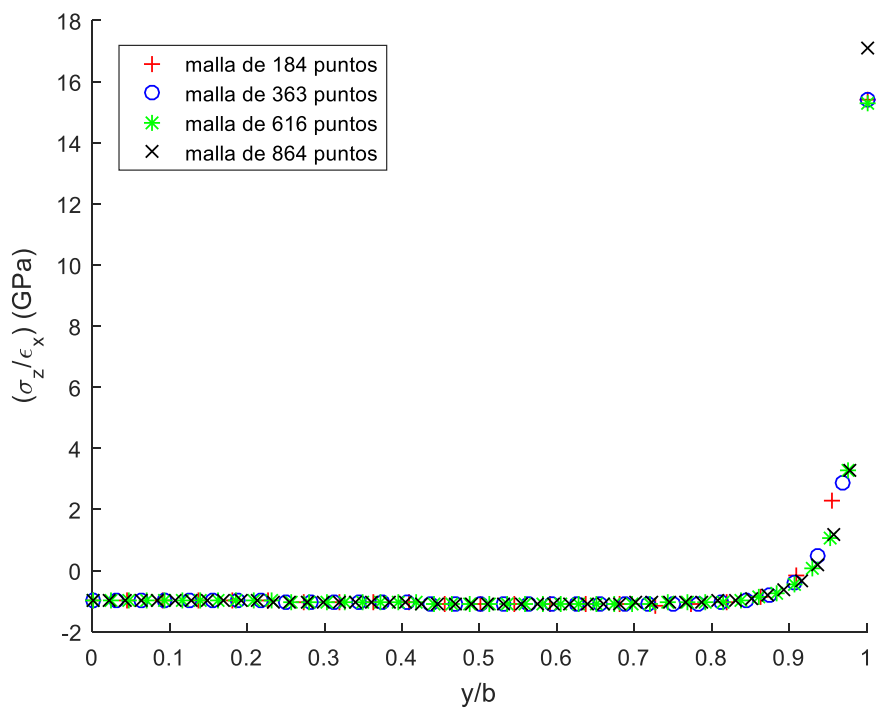


Figura 3.14. Tensión  $\sigma_z$  a través del semiancho en la interfase más cercana al plano de simetría

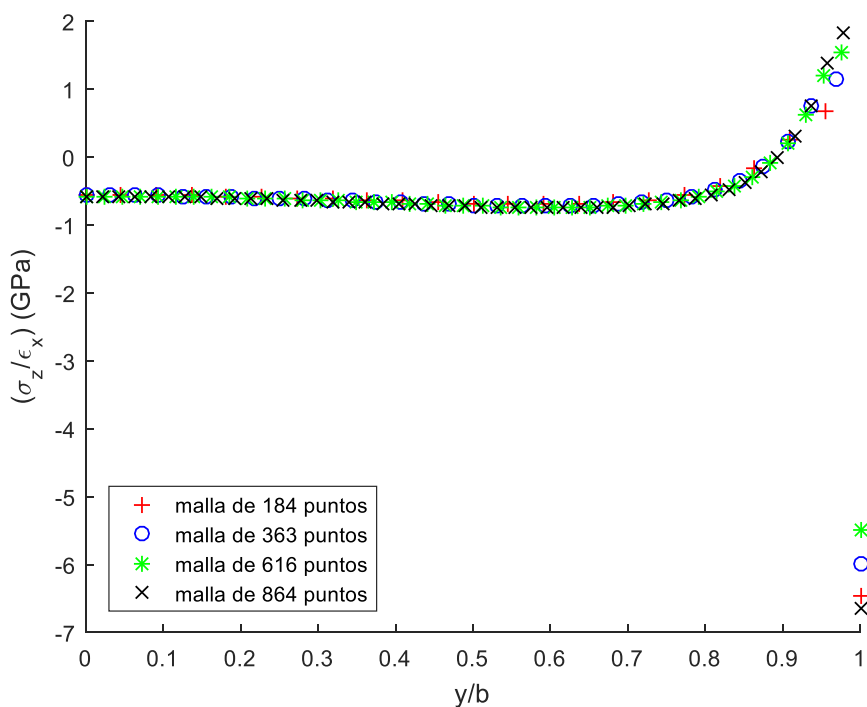


Figura 3.15. Tensión  $\sigma_z$  a través del semiancho en la interfase intermedia para distintas mallas

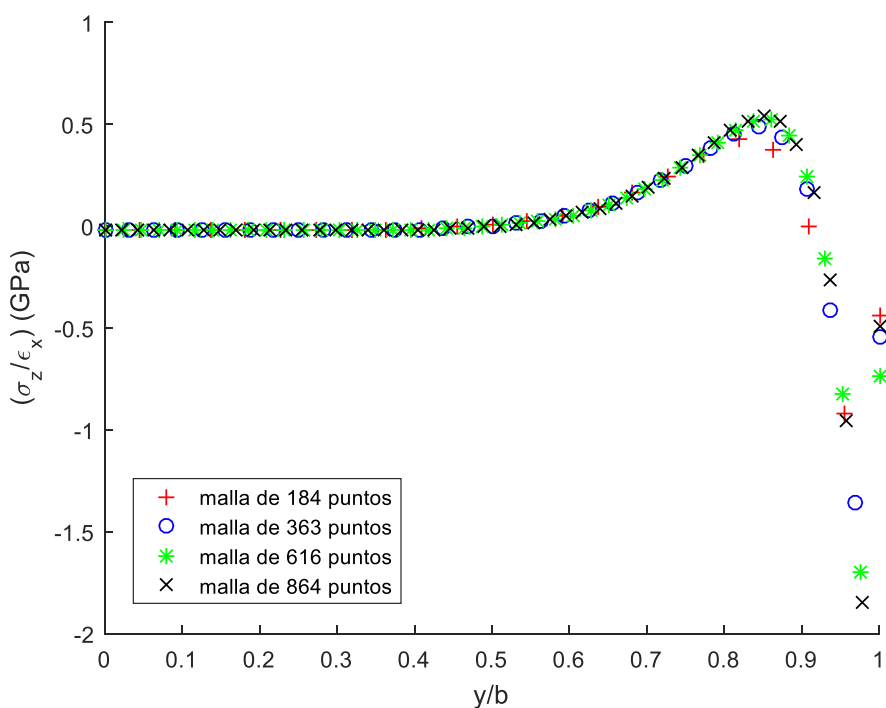
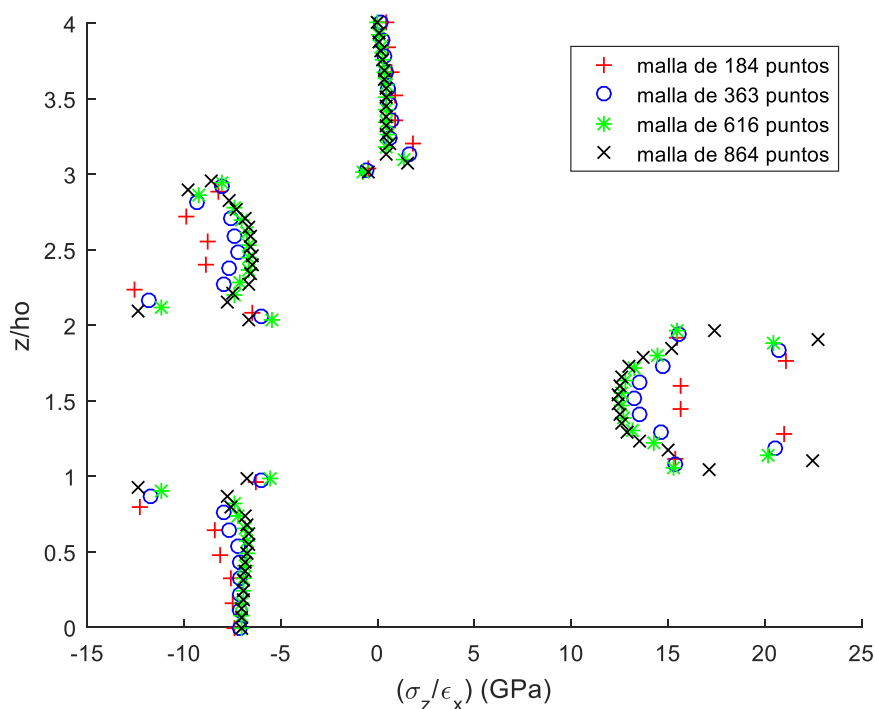


Figura 3.16. Tensión  $\sigma_z$  a través del semiancho en la interfase más lejana al plano de simetría



**Figura 3.17. Tensión  $\sigma_z$  a través del espesor en el borde libre para distintas mallas**

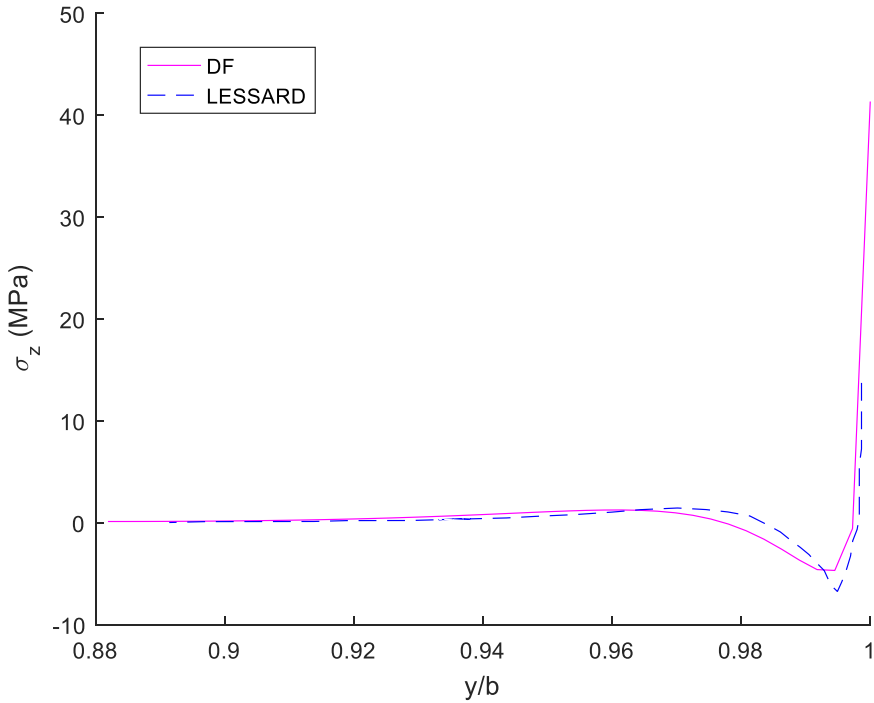
Como puede observarse en las figuras anteriores, los valores obtenidos para las diferentes mallas no coinciden exactamente entre sí, aunque están situados sobre la misma curva. Este resultado es razonable ya que, dado que las mallas que se han utilizado están definidas sobre puntos espaciales situados en sitios diferentes, los valores corresponderán a puntos materiales diferentes. De esta manera, la solución del esquema de diferencias finitas que hemos utilizado reproduce la evolución de las tensiones y ésta es independiente de la malla que se utilice.

Conforme las mallas van siendo progresivamente más finas, los puntos situados en la zona cercana al borde libre van tendiendo asintóticamente a valores de tensión progresivamente más grandes. Este es el comportamiento numérico típico de una zona cuya solución es asintótica.

Mientras que las dos mallas más gruesas presentan diferencias apreciables con respecto a las dos más finas, la malla más fina apenas aporta mejoras con respecto a la malla de 616 puntos. Por este motivo, salvo que se especifique lo contrario, para reducir el coste computacional utilizaremos en lo que sigue esta última malla.

### 3.7. Validación del modelo

A continuación, se muestra una comparación de los resultados que se obtienen, usando el método descrito, con los resultados mostrados en [19] para algunos laminados particulares. Las propiedades mecánicas del material analizado son las mismas que se muestran en la Tabla 3-1. Los resultados que se aportan representan los valores de las tensiones  $\sigma_z$  y  $\sigma_{yz}$  a lo largo del semiancho del laminado a la altura de la interfase y a lo largo del espesor en el borde libre, y se comparan con las gráficas análogas para una deformación axial de un 1% y un laminado cuyas propiedades geométricas son  $b = 12.7 \text{ mm}$  y  $h_o = 0.134 \text{ mm}$ . Se presentan los resultados para un laminado  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  y para otro  $[90^\circ, 0^\circ]_s$ , respectivamente.



**Figura 3.18.** Tensión  $\sigma_z$  en la interfase para un laminado  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  a lo largo del semiancho

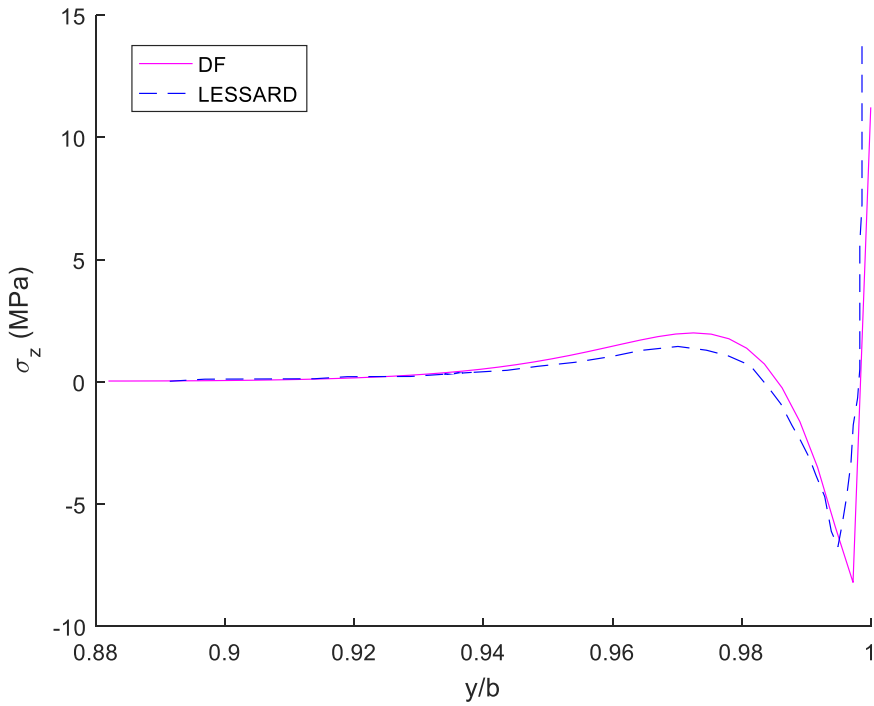


Figura 3.19. Tensión  $\sigma_z$  en la interfase para un laminado  $[90^\circ, 0^\circ]_s$  a lo largo del semiancho

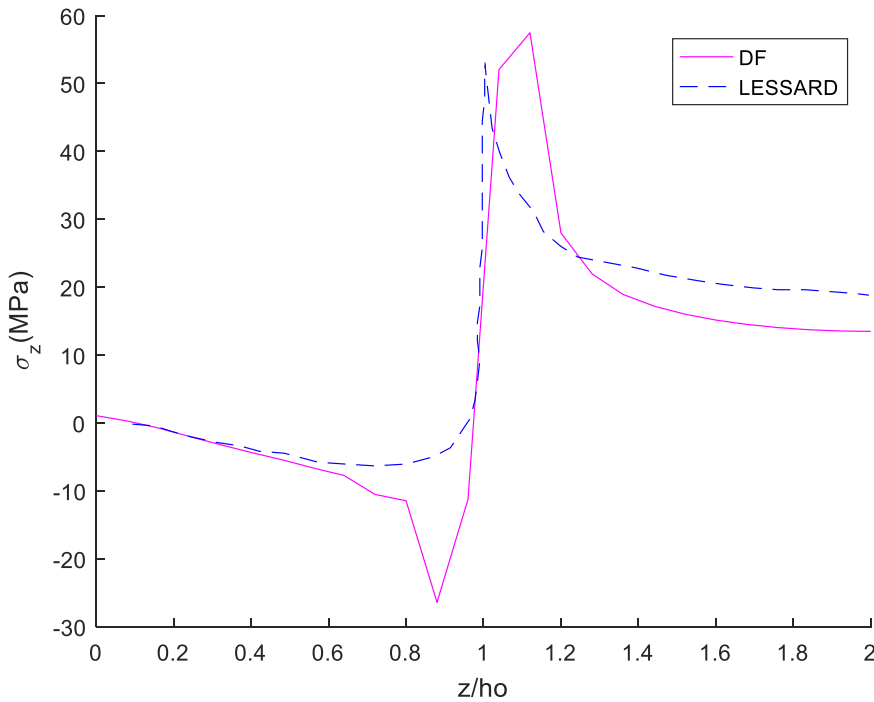
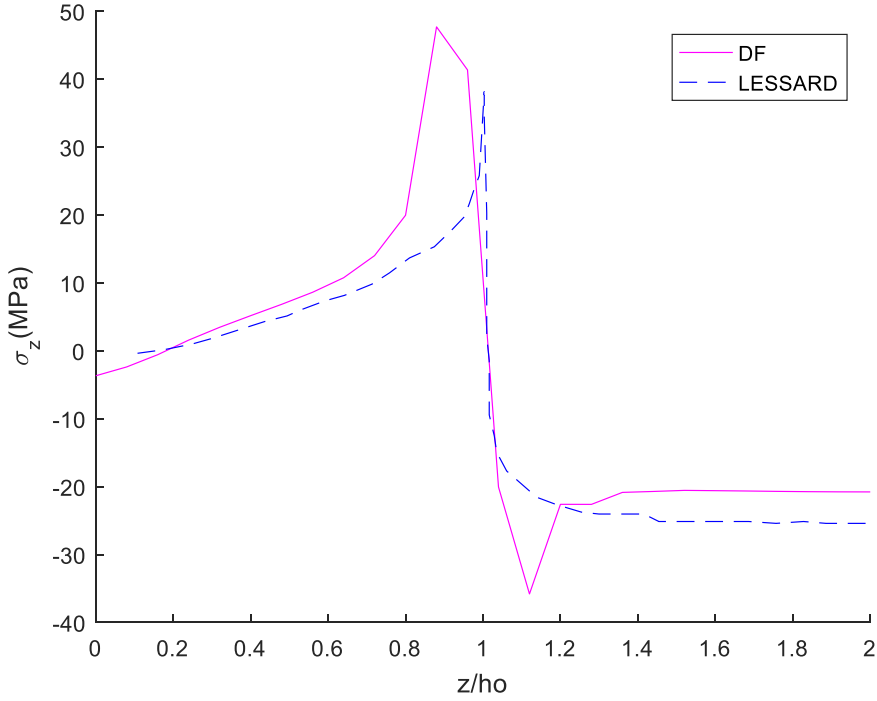


Figura 3.20. Tensión  $\sigma_z$  a lo largo del borde libre para un laminado  $[0^\circ, 90^\circ]_s$





**Figura 3.21.** Tensión  $\sigma_z$  a lo largo del borde libre para un laminado  $[90^\circ, 0^\circ]_s$

Como puede observarse, los resultados muestran cambios de signo para  $\sigma_z$  cuando se cambia la secuencia de apilamiento de  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  a  $[90^\circ, 0^\circ]_s$ . Este hecho es muy relevante ya que componentes positivas de la tensión normal contribuirán a iniciar mecanismos de delaminación. Resultados análogos pueden encontrarse en [3] obtenidos con una metodología diferente. Estos resultados justifican la diferencia de la progresión del daño por delaminación encontrada experimentalmente entre las dos secuencias de apilamiento mostradas. Efectos como el que se acaba de describir no podrían ser recogidos por teorías bidimensionales como la Teoría del Laminado, que no tiene en cuenta la secuencia de apilamiento para obtener la rigidez de la lámina equivalente.

Conviene recordar que la tensión  $\sigma_{yz}$  a lo largo del espesor en el borde libre se anula por condición de contorno. De esta manera, las gráficas representadas para esta tensión a lo largo del espesor corresponden a los valores que se tienen, en una zona interior del laminado muy cercana al borde libre, en concreto en los nodos inmediatamente anteriores a los situados justo en el extremo<sup>6</sup>:

<sup>6</sup> Así, la tensión  $\sigma_{yz}$  en las inmediaciones del borde libre es de órdenes de magnitud inferior a  $\sigma_z$  y  $\sigma_{xz}$ . Por este motivo, para capturar mejor las singularidades se han utilizado mallas de 1296 puntos.

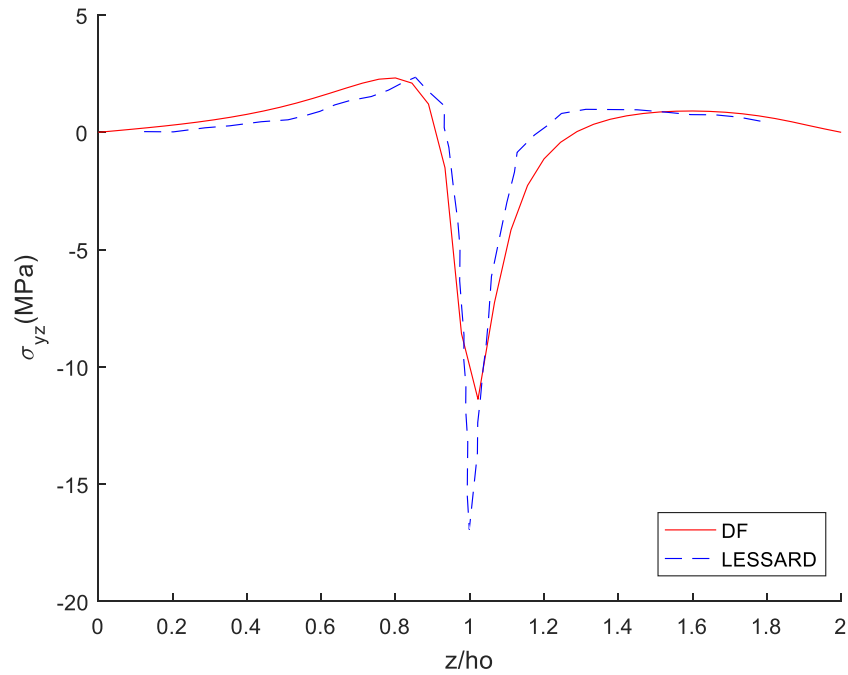


Figura 3.22. Tensión  $\sigma_{yz}$  a lo largo de  $z$  (al 92% de la distancia hasta el borde libre) para un laminado  $[0^\circ, 90^\circ]_s$

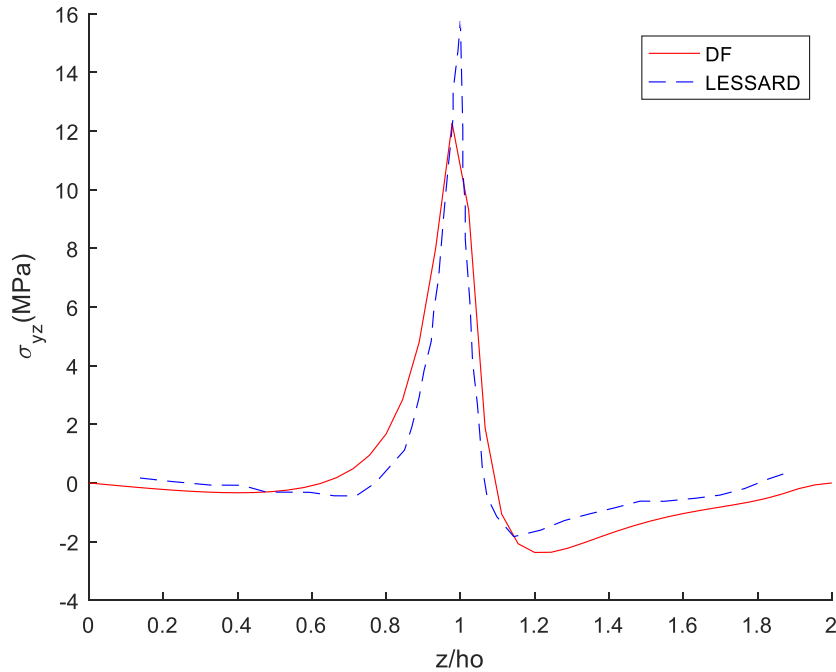


Figura 3.23. Tensión  $\sigma_{yz}$  a lo largo de  $z$  (al 92% de la distancia hasta el borde libre) para un laminado  $[90^\circ, 0^\circ]_s$

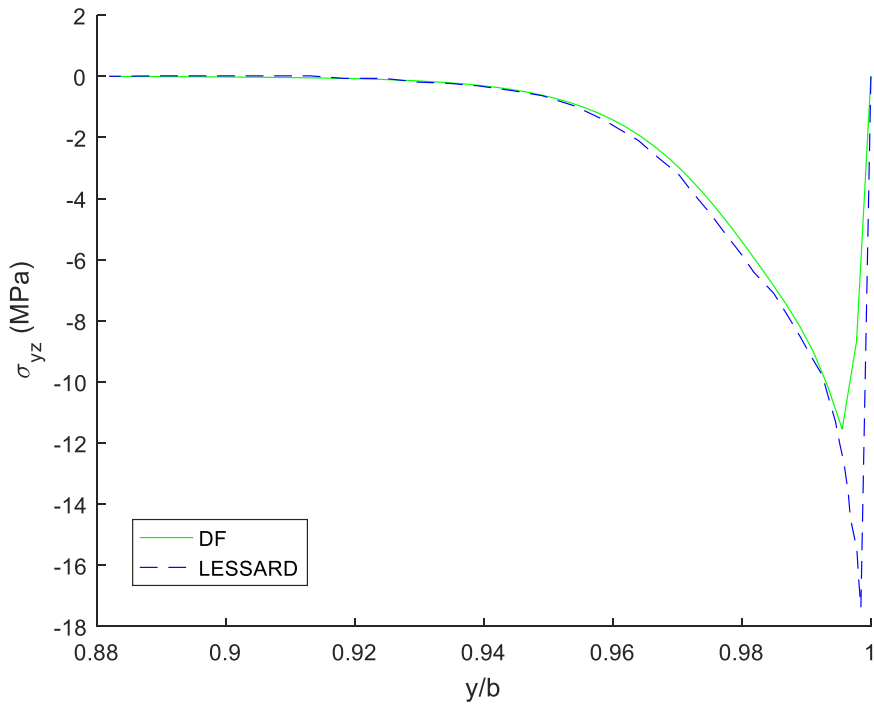


Figura 3.24. Tensión  $\sigma_{yz}$  en la interfase para un laminado  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  a lo largo del semiancho

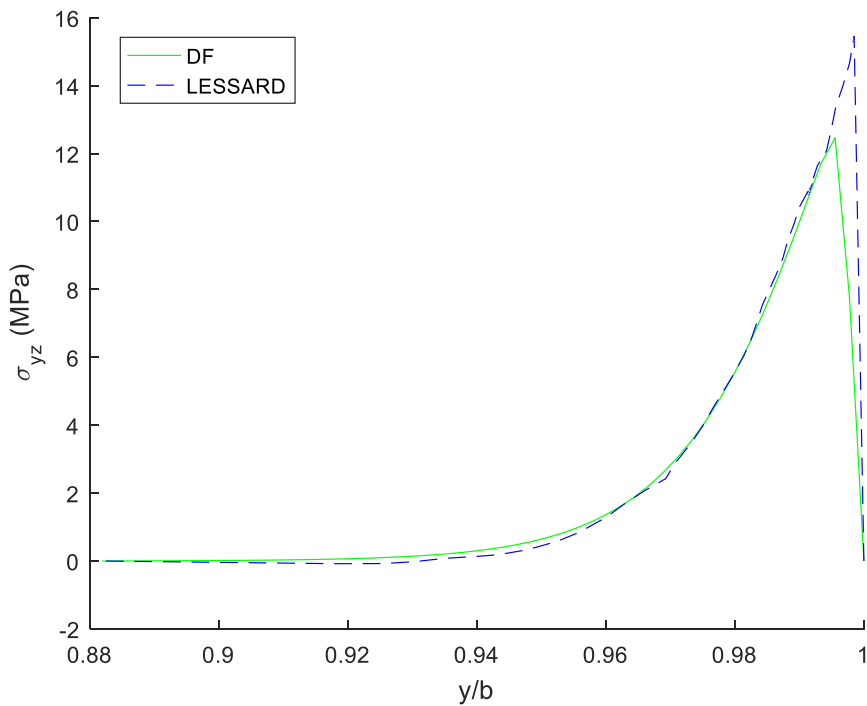


Figura 3.25. Tensión  $\sigma_{yz}$  en la interfase para un laminado  $[90^\circ, 0^\circ]_s$  a lo largo del semiancho

Los resultados aportados en [19] que se han utilizado para validar el modelo que se ha desarrollado, fueron calculados utilizando un modelo de elementos finitos que empleaba elementos hexaédricos cuadráticos para describir los efectos de borde.

Tanto el carácter adaptativo del Método de los Elementos Finitos, utilizado en [19], en zonas donde se prevean gradientes mayores, como el uso de elementos cuadráticos, anticipan resultados más ajustados a la realidad que los que se puedan obtener con un esquema de diferencias finitas como el empleado en este trabajo.

Sin embargo, a la vista de los resultados, el modelo utilizado captura apropiadamente tanto la forma como el rango de valores donde las tensiones son predominantes. Valores análogos para las tensiones mostradas en la Figura 3.19 y en la Figura 3.24 pueden encontrarse en [20] y [24].

Por otro lado, el detalle de las zonas con solución singular que se consigue con el esquema de diferencias finitas, cuando se compara con la solución de elementos finitos puede resultar insuficiente. Además, la malla debe ser refinada adecuadamente cuando se quiere obtener el detalle de las tensiones que adquieren valores menores. A efectos de completar la validación, se han comparado los valores que se obtienen con la herramienta desarrollada, con los resultados mostrados en [24].

En esta referencia, se analiza también, con un esquema de diferencias finitas, la evolución de las tensiones, por unidad de deformación, de un laminado con una secuencia de apilamiento  $[45^\circ, -45^\circ]_s$  sometido a un estado de tracción uniaxial. La relación geométrica  $R$  para este caso, toma un valor de 8 y las propiedades mecánicas son las mismas que las que se muestran en la Tabla 3-1. La comparación de resultados se muestra en la Figura 3.26 y en la Figura 3.27 donde en línea discontinua se muestran los resultados extraídos de la referencia.

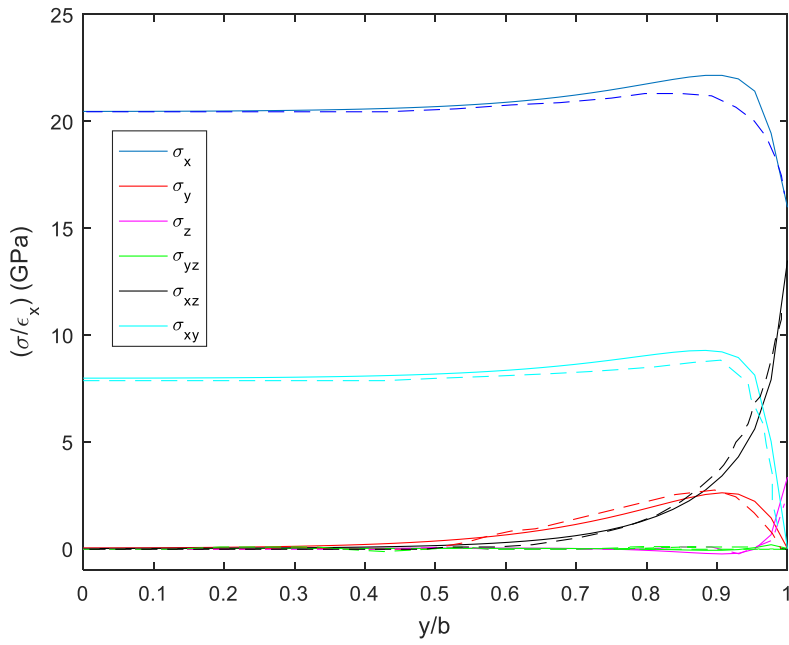


Figura 3.26. Evolución de las tensiones a lo largo del semiancho del laminado  $[45^\circ, -45^\circ]_s$  en la interfase

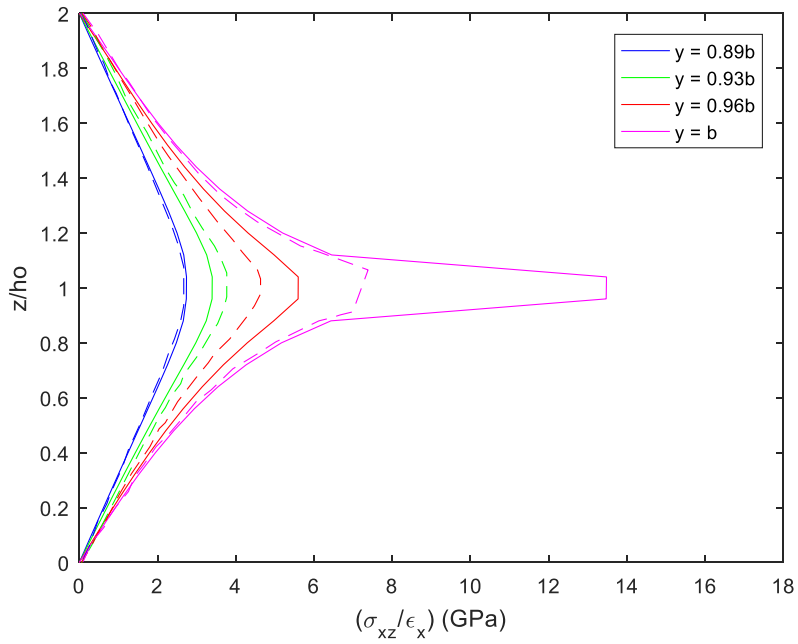


Figura 3.27. Evolución de  $\sigma_{xz}$  a lo largo del espesor del laminado  $[45^\circ, -45^\circ]_s$

La comparativa realizada con los resultados extraídos de [19] y la coincidencia de los resultados para todas las componentes de tensión con la solución del modelo utilizado en [24] permite concluir que el modelo es suficientemente preciso para estudiar, a nivel tensional, laminados simétricos sometidos a carga uniaxial en su plano.

## 3.8. Resultados y discusión

### Análisis de las tensiones interlaminares y desplazamiento longitudinal

En este apartado, se analizan, utilizando la herramienta desarrollada, las componentes de tensión interlaminar  $\sigma_z$ ,  $\sigma_{yz}$  y  $\sigma_{xz}$  que aparecen en laminados simétricos sometidos a un estado de tracción uniaxial. Con el objetivo de fijar algunas ideas que permitan entender la física que gobierna las tensiones interlaminares, se harán algunas puntualizaciones sobre un caso en concreto. Un buen ejemplo lo constituye el caso estudiado en [24] que se ha utilizado también para validar el modelo.

En la Figura 3.26 se presenta la evolución de las componentes de tensión a lo largo del semiancho del laminado a la altura de la interfase. Los valores de las tensiones se muestran por unidad de deformación axial. A la vista de los resultados, se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Desde el centro de laminado hasta aproximadamente el 60% del semiancho, las únicas componentes de tensión significativas son las componentes contenidas en el plano del laminado  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_{xy}$ . El valor de estas tensiones coincide con los valores que proporciona la Teoría del Laminado [24].
- A partir del 50% del semiancho se tienen valores crecientes de las componentes de tensión fuera del plano ( $\sigma_z$ ,  $\sigma_{yz}$  y  $\sigma_{xz}$ ), alcanzándose niveles de tensión del mismo orden de magnitud que los valores de las componentes en el plano (en  $\sigma_{xz}$  para este laminado). Estos resultados muestran que las tensiones interlaminares son nulas en la zona central del ancho del laminado igual al doble del espesor del mismo. Este resultado ha sido encontrado también por otros investigadores ([24] y [23]).
- Estos valores alcanzan sus máximos en el borde libre del laminado y serán los responsables del inicio de mecanismos de fallo como la delaminación. La presencia de estas tensiones permite equilibrar las tensiones contenidas en el plano según (3-35), conforme nos acercamos al borde libre.
- El modelo desarrollado permite estimar un campo de tensiones que cumple con las condiciones de contorno en el borde libre del laminado ( $\sigma_y$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ ). De esta

manera, se supera la limitación que impone la Teoría del Laminado al no predecir valores nulos para  $\sigma_{xy}$  en el extremo.

En la Figura 3.27 se muestran los valores de la tensión  $\sigma_{xz}$  a lo largo del espesor del laminado para diferentes etapas progresivamente más cercanas al borde libre. De nuevo, los valores de las tensiones se muestran por unidad de deformación. Se pueden hacer las siguientes consideraciones:

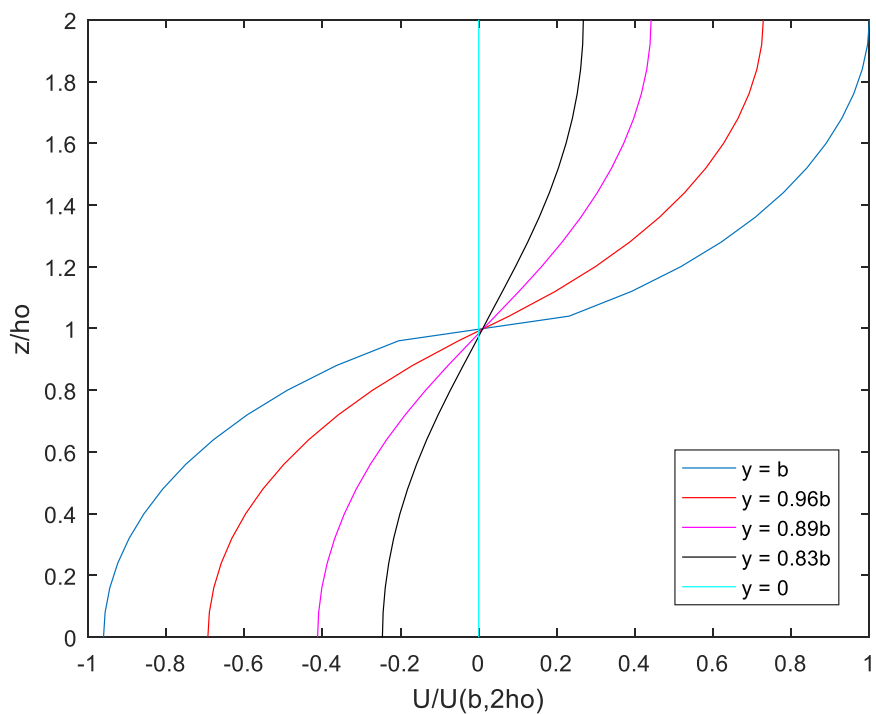
- Se observa que en zonas progresivamente cercanas a la interfase el valor de las tensiones se dispara siguiendo una tendencia que permite que los valores de las tensiones justo en la interfase ( $z = h_o$ ) se igualen.
- Los valores de las tensiones crecen cerca del borde libre del laminado, indicando que será justo en el borde libre donde primeramente se inicien los mecanismos de fallo de delaminación o la rotura transversal por cortadura.

Por estos motivos, los alrededores del borde libre a la altura de la entrecara entre láminas cuyas fibras tienen orientaciones distintas, constituirán una zona crítica que, en general, deberá ser estudiada con detalle. En concreto, interesará estudiar los valores de las tensiones interlaminares cuando se cambia la secuencia de apilamiento y la orientación de la fibra en cada una de las láminas.

Sin embargo, dado que la medida experimental de las tensiones interlaminares es compleja de realizar, en este trabajo se propone utilizar como medida indirecta de las mismas, la presencia de la componente de *desplazamiento longitudinal relativo* representado por la función  $U(y, z)$  definida en (3-30).

Dadas las definiciones de los deformaciones en (3-67), y las tensiones en (3-36), las derivadas de  $U(y, z)$  respecto de 'y' y 'z' serán magnitudes determinantes a la hora de establecer el valor de dichas variables dependientes. Por esta razón, la evidencia experimental de la presencia del desplazamiento longitudinal relativo permitiría confirmar la existencia de las tensiones interlaminares a lo largo del borde libre.

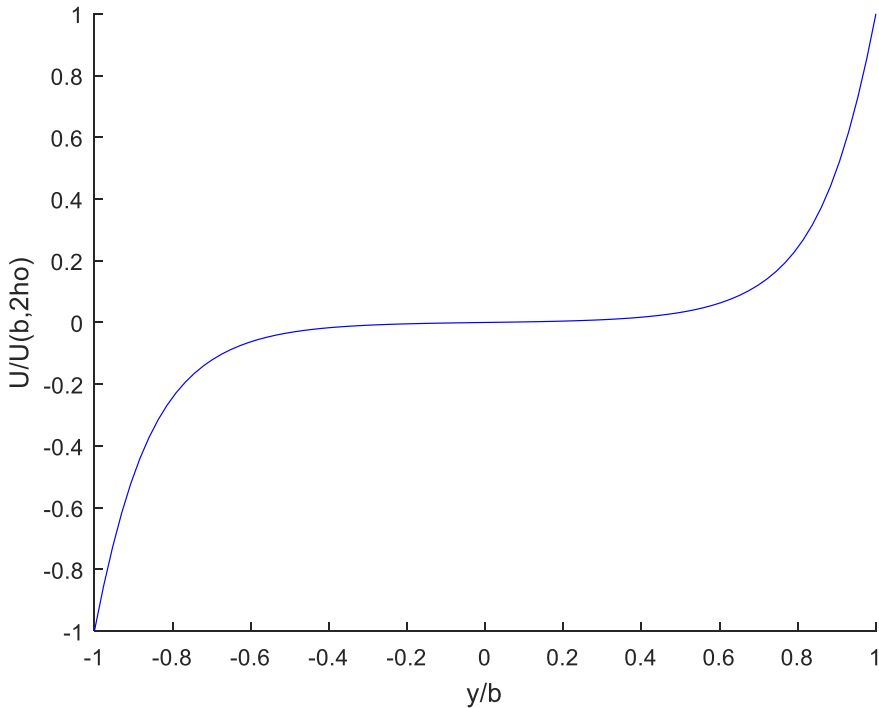
El aspecto de la forma funcional de  $U(y, z)$  obtenido con el método que se ha desarrollado, se muestra a continuación. En primer lugar, se representa en la Figura 3.28 para el mismo caso estudiado en [24], la evolución del desplazamiento longitudinal a lo largo del espesor para diferentes etapas del semiancho. Los valores de  $U(y, z)$  aparecen adimensionalizados con el valor  $U(b, 2h_o)$  y se dan por unidad de deformación axial.



**Figura 3.28.** Evolución de  $U(y, z)$  a lo largo del espesor del laminado  $[45^\circ, -45^\circ]_s$

En segundo lugar, en la Figura 3.29, se muestra la evolución  $U(y, z)$  a lo largo del ancho del laminado en la cara superior ( $z = 2h_o$ ) del mismo, adimensionalizando con su valor en el extremo.



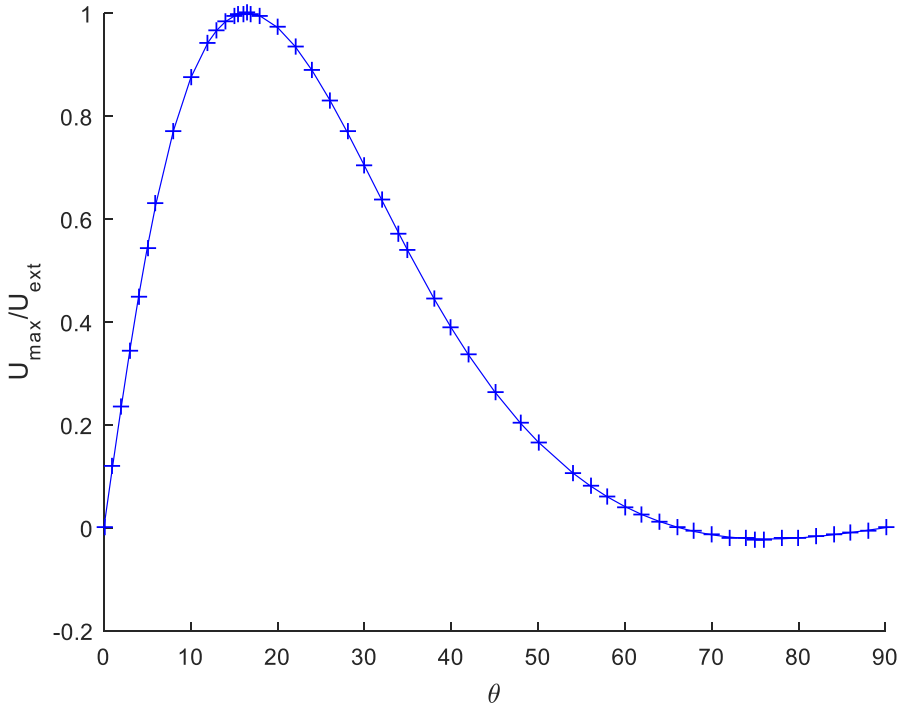


**Figura 3.29.** Evolución de  $U(y, 2h_o)$  a lo largo del ancho en la cara superior del laminado  $[45^\circ, -45^\circ]_s$

A la vista de los resultados mostrados en ambas figuras, se pueden hacer los siguientes comentarios:

- Debe recordarse que el campo  $U(y, z)$  respecto del plano 'xy' debe ser simétrico, según las condiciones (3-28), mientras que respecto del plano 'xz' debe ser antisimétrico. Lo segundo se muestra en la Figura 3.29 donde se ha representado el resultado a lo largo de todo el ancho del laminado.
- La gran variación con respecto a 'z' ( $U_z \rightarrow \infty$ ) que se observa para  $U(y, z)$  a la altura de la interfase ( $z = h_o$ ) en la Figura 3.28, predice valores singulares, en la misma zona, para las tensiones  $\sigma_{xz}$  que se pueden observar en la Figura 3.27. Por el contrario, se tendrá un valor nulo para  $\sigma_{xz}$  en  $z = 0$  y  $z = 2h_o$ .
- La forma del campo  $U(y, z)$  en la cara superior del laminado ( $z = 2h_o$ ) fue capturada de forma cualitativa en [29]. El valor máximo de este campo, como puede observarse en la Figura 3.29, se da en los bordes laterales del laminado y será función del ángulo de inclinación de las fibras.

Para aclarar el último de los aspectos, se representan los valores máximos de  $U(y, z)$ , por unidad de deformación axial, en el extremo ( $y = b, z = 2h_o$ ) para laminados con una secuencia de apilamiento de tipo  $[\theta, -\theta]_s$  cuando se varía el ángulo de inclinación de las fibras  $\theta$  y para el mismo material que se viene utilizando en la Figura 3.29 y anteriores. Los resultados obtenidos se muestran a continuación:



**Figura 3.30.** Valor de  $U$  en el extremo cuando se varía el ángulo de inclinación de las fibras. Secuencia  $[45^\circ, -45^\circ]_s$

En la Figura 3.30, se ha adimensionalizado el desplazamiento con el valor máximo que se da para un ángulo de inclinación de  $17^\circ$  aproximadamente. Como puede verse, la inclinación de las fibras cambia el valor del campo de desplazamiento en el extremo del laminado, encontrando un valor máximo y dos valores nulos que aproximadamente se encuentran en  $0^\circ$  y en  $65^\circ$ .

Como se ha comentado, evidencias a nivel cualitativo de este tipo han sido confirmadas experimentalmente mediante el uso de la llamada *técnica de Moiré* (véase [29]). Así, parece razonable tratar de determinar experimentalmente la presencia de las tensiones interlaminares a partir del gradiente de desplazamiento longitudinal.

## Resultados experimentales

Debido a los aspectos que se acaban de exponer, el desplazamiento longitudinal relativo es una variable representativa de la presencia de tensiones interlaminares. Además, esta variable puede ser determinada experimentalmente con relativa sencillez.

Aprovechando que la forma del campo de desplazamiento longitudinal permite caracterizar el proceso a partir de la diferencia de los valores del campo en los extremos del laminado (véase la Figura 3.29), se planteará un ensayo de tracción que permita monitorizar el desplazamiento ( $u_1$  y  $u_2$ ) de, al menos, dos puntos de referencia situados en la misma sección transversal.

Los valores de desplazamiento medidos en la cara superior del laminado se comparan con la curva correspondiente para el material ensayado obtenida con la herramienta. Para ello, utilizando la primera de (3-30), se tiene que:

$$u_2 - u_1 = (\varepsilon_x x + U_2) - (\varepsilon_x x + U_1) = U_2 - U_1 = \Delta U \quad (3-78)$$

Donde  $\varepsilon_x$  es la deformación impuesta en el ensayo y ' $x$ ' representa la coordenada longitudinal donde se encuentran los dos puntos de referencia. Usando (3-78), se puede obtener a partir de las medidas de laboratorio  $u_1$  y  $u_2$ , el incremento de desplazamiento longitudinal  $\Delta U$  que posteriormente se comparará con el incremento de desplazamiento longitudinal obtenido con el método numérico.

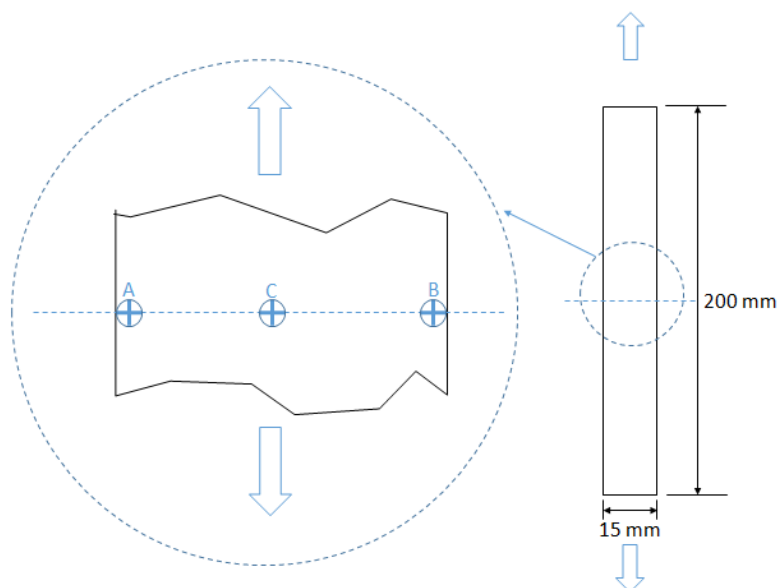
Este procedimiento permite estudiar la precisión del modelo desarrollado y validarlo experimentalmente. Con este propósito, se ha realizado una campaña de ensayos según la norma estándar ASTM D3039 [30] para ensayos de tracción de materiales compuestos de matriz polimérica. Se han ensayado probetas de 200 x 15 x 3.5 mm de fibra de carbono IM7 y matriz de resina epoxy de tipo MTM-45-1. Las propiedades mecánicas del material utilizado aparecen en la siguiente tabla y han sido tomadas de [31]:

$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$E_{33}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$G_{12}$ $G_{13}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$ $\nu_{23}$
137	7.36	7.93	2.94	3.89	0.32	0.5

**Tabla 3-2. Propiedades mecánicas del material IM7/MTM-45-1 [31]**

Las probetas ensayadas son laminados conformados mediante 28 láminas apiladas de forma simétrica y cuyas fibras tienen orientaciones cruzadas. Las secuencias de apilamiento son del tipo  $[+\theta_7, -\theta_7]_s$  y se han ensayado tres orientaciones que respectivamente son  $6^\circ$ ,  $12^\circ$  y  $30^\circ$ .

De los ensayos, se han obtenido las curvas fuerza-desplazamiento y el desplazamiento longitudinal de tres puntos mediante técnicas ópticas. En cada probeta, en su sección central, se marcaron tres puntos alineados, dos de ellos llamados A y B situados, cada uno, próximos a un borde (Figura 3.31), y un tercero llamado C, en el centro de la probeta.



**Figura 3.31. Disposición de los puntos de referencia en la probeta**

Para grabar el desplazamiento de los puntos de referencia se ha utilizado una cámara digital de 2048 x 1536 píxeles<sup>7</sup> colocada adecuadamente para que pudiera grabar el transcurso del ensayo tomando un plano frontal del conjunto coincidente con la cara superior del laminado. Posteriormente, mediante un software de procesamiento de vídeo, se establece la trayectoria de los puntos de interés y se obtiene el incremento longitudinal del desplazamiento de los puntos para una deformación axial del 0.69% para todas las probetas<sup>8</sup>.

Utilizando (3-78), se puede obtener el incremento  $\Delta U$  entre la pareja de puntos A y C, por un lado, y la pareja B y C por otro. Gracias a este procedimiento se puede obtener de cada ensayo que se realice, dos medidas del gradiente de desplazamiento (entre el centro de la probeta y el borde lateral) ya que teóricamente la curva  $U(y,z)$ , a ambos lados del laminado, es antisimétrica como se muestra en la Figura 3.29.

Se han realizado dos ensayos de tracción para cada una de las orientaciones. Como cada ensayo permite obtener dos incrementos de deformación longitudinal (uno para la pareja de

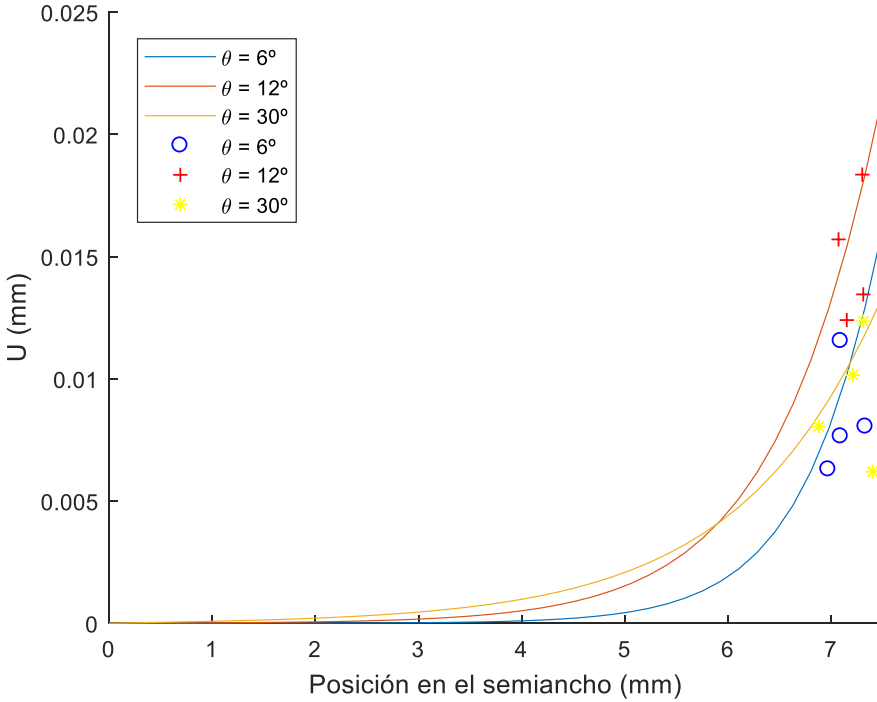
<sup>7</sup> La marca de la cámara es IDS y el modelo es UI-1460LE-C-HQ.

<sup>8</sup> Este nivel de deformación garantiza que, en todos los casos, se está suficientemente lejos de la carga de rotura, evitando efectos no lineales.

puntos A-C y otro para la pareja de puntos B-C), en total se tendrán doce puntos experimentales.

Para contrastar los resultados de los ensayos para las tres orientaciones, se han obtenido, usando la herramienta desarrollada, las funciones  $U(y, z)$  en la cara superior de la probeta introduciendo la geometría correspondiente ( $b = 7.5 \text{ mm}$ ;  $h_o = 0.875 \text{ mm}$ ) y una deformación axial de 0.69%. Las propiedades mecánicas del material utilizadas son las recogidas en la Tabla 3-2.

La comparación de resultados se muestra en la siguiente figura, representando los resultados numéricos en línea continua mientras que los resultados experimentales aparecen según puntos discretos:

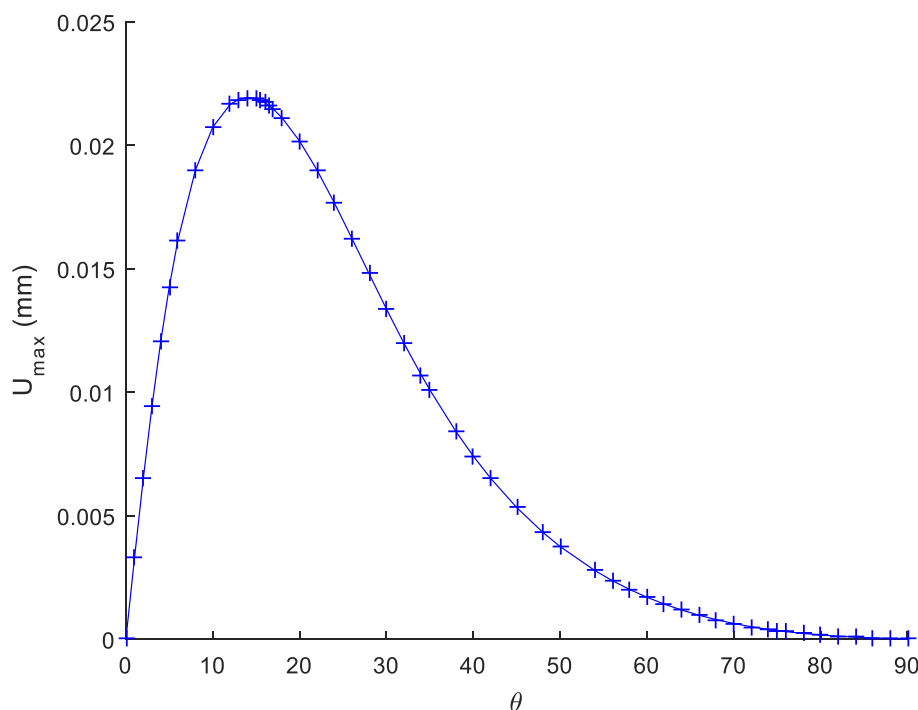


**Figura 3.32.** Gradiente del desplazamiento longitudinal en la superficie del laminado  $[\theta_7, -\theta_7]_s$  y  $\epsilon_x = 0.69\%$

A la vista de los resultados obtenidos se concluye que el modelo utilizado permite obtener resultados que presentan un buen acuerdo con los resultados experimentales.

La fuerte dependencia de la curva  $U(y, z)$  con el ángulo de inclinación de las fibras se visualiza mejor representando el valor en el borde lateral del laminado en la cara superior. En la Figura 3.33, se muestra este desplazamiento para el laminado utilizado en los ensayos,  $[+\theta_7, -\theta_7]_s$ ,

cuando se varía el ángulo de inclinación de las fibras entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Se observa un máximo para un valor de  $14^\circ$  y se anula en  $0^\circ$  y en  $90^\circ$ .



**Figura 3.33.** Máximo valor del desplazamiento longitudinal en función de  $\theta$  para un laminado  $[\theta_7, -\theta_7]_s$  y  $\varepsilon_x = 0.69\%$

### Influencia de la secuencia de apilamiento y la orientación de las fibras

Habiendo sido validada la herramienta a partir de la comparación con resultados de la literatura y con los resultados experimentales que se han obtenido, parece razonable utilizarla para hacer un estudio sistemático de diferentes secuencias de apilamiento y diferentes ángulos de inclinación de las fibras.

Tal y como quedó establecido, la zona cercana a la interfase entre dos láminas con diferente orientación de las fibras, cerca del borde libre, es una zona sensible a que aparezcan máximos de las tensiones interlaminares que produzcan el inicio de mecanismos de fallo en el laminado. Por ello en este apartado, se muestran los resultados que se obtienen, usando la herramienta que se ha desarrollado, cuando se analizan las tensiones interlaminares a la altura de la interfase en el borde libre, para laminados con las mismas propiedades geométricas que se describieron en el apartado anterior, y cuyo material viene gobernado por las constantes mecánicas descritas en la Tabla 3-2. Se estudian cuatro laminados simétricos

diferentes, dos de cuatro láminas y otros dos de seis láminas. Para cada laminado se estudiarán dos secuencias de apilamiento, mostrando el valor máximo de las tensiones interlaminares cuando se cambia la inclinación de las fibras en el intervalo  $[0^\circ, 90^\circ]$ . Los laminados que se estudian se recogen en la siguiente tabla:

$N^\circ$ Láminas\Laminado	1		2	
Dos Láminas	$[\theta, -\theta]_s$	$[-\theta, \theta]_s$	$[2\theta, -\theta]_s$	$[-\theta, 2\theta]_s$
Cuatro Láminas	$[\theta, \theta, -\theta]_s$	$[\theta, -\theta, \theta]_s$	$[\theta, 2\theta, -\theta]_s$	$[\theta, -\theta, 2\theta]_s$

**Tabla 3-3. Laminados y secuencias de apilamiento estudiadas**

En el caso de los laminados de cuatro láminas, cuyos esquemas son  $[\theta, -\theta]_s$  y  $[2\theta, -\theta]_s$ , se mostrarán las tensiones en el borde libre a la altura de la entrecara entre las dos láminas con diferente inclinación de fibras. Análogamente se estudiarán las secuencias de apilamiento  $[-\theta, \theta]_s$  y  $[-\theta, 2\theta]_s$ .

Por otro lado, en el caso de los laminados de seis láminas cuyos esquemas son  $[\theta, \theta, -\theta]_s$  y  $[\theta, 2\theta, -\theta]_s$ , se mostrarán las tensiones en el borde libre a la altura de la primera entrecara desde el plano de simetría. También se estudiarán las secuencias de apilamiento  $[\theta, -\theta, \theta]_s$  y  $[\theta, -\theta, 2\theta]_s$ . Finalmente, también se mostrarán, a efectos de completar el estudio, el valor de las tensiones interlaminares a la altura de la segunda entrecara para los laminados  $[\theta, 2\theta, -\theta]_s$  y  $[\theta, -\theta, 2\theta]_s$ .

Por condición de contorno, la tensión  $\sigma_{yz}$  es nula en el borde libre, aunque se mostrará a efectos de referencia en todos los laminados. Asimismo, la deformación axial aplicada al conjunto será de  $\varepsilon_x = 0.69\%$ . Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

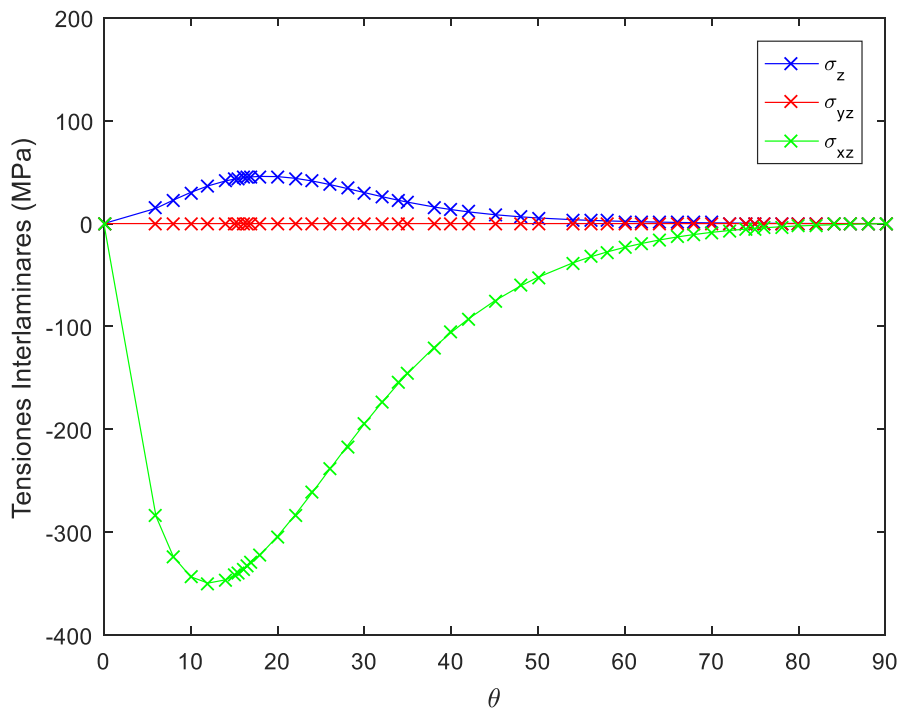
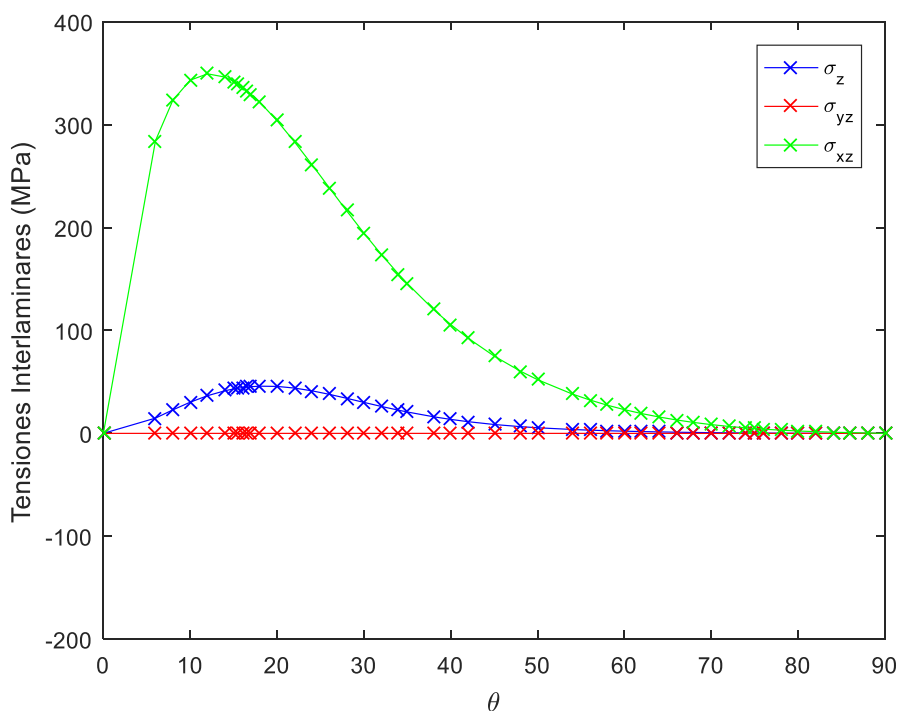


Figura 3.34. Tensiones interlaminares en el borde libre en la interfase. Secuencia  $[\theta, -\theta]_s$





**Figura 3.35.** Tensiones interlaminares en el borde libre en la interfase. Secuencia  $[-\theta, \theta]_s$

De los resultados mostrados en la Figura 3.34 y en la Figura 3.35, para las secuencias  $[\theta, -\theta]_s$  y  $[-\theta, \theta]_s$ , se deriva que la componente de tensión predominante es la  $\sigma_{xz}$  en ambos casos, adquiriendo su valor máximo en  $\theta = 12^\circ$ . Por otro lado, la componente de tensión  $\sigma_z$ , que es un orden de magnitud menor que la de cortadura, encuentra su máximo en  $\theta = 18^\circ$ . Además, ninguna de las tensiones cambia de signo en el intervalo estudiado. La componente normal, aunque es menor, al ser positiva, contribuirá a la delaminación.

Conviene notar que a pesar de que esta secuencia de apilamiento corresponde al caso que se comprobó experimentalmente, el máximo de  $\sigma_{xz}$  no se produce exactamente para el mismo valor que produce el máximo desplazamiento longitudinal. Según la Figura 3.33, dicho máximo se producía para una orientación de  $14^\circ$ . Esta aparente discrepancia se justifica gracias a las dos consideraciones siguientes:

- Los lugares del laminado donde se miden la tensión de cortadura y el desplazamiento longitudinal no corresponden a los mismos puntos geométricos. En el primer caso, la tensión corresponde a un punto situado en la interfase en el borde libre y, por tanto, se encuentra a un cuarto del espesor de la cara superior del laminado. En el segundo caso, el desplazamiento longitudinal corresponde a un punto situado en el extremo de la cara superior del mismo.

- El efecto del desplazamiento longitudinal viene provocado por la acción combinada de la aparición de las componentes de tensión interlaminar  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_z$ . En este sentido, el máximo para la tensión normal  $\sigma_z$  que se encuentra en  $\theta = 18^\circ$  contribuye a desplazar el ángulo de inclinación para el que se produce el máximo desplazamiento longitudinal.

Por último, la única diferencia apreciable, en este caso, que produce el cambio de la secuencia de apilamiento es el signo de la tensión de cortadura que, aparte de producir un cambio en el sentido de la deformación angular, es irrelevante a efectos cualitativos.

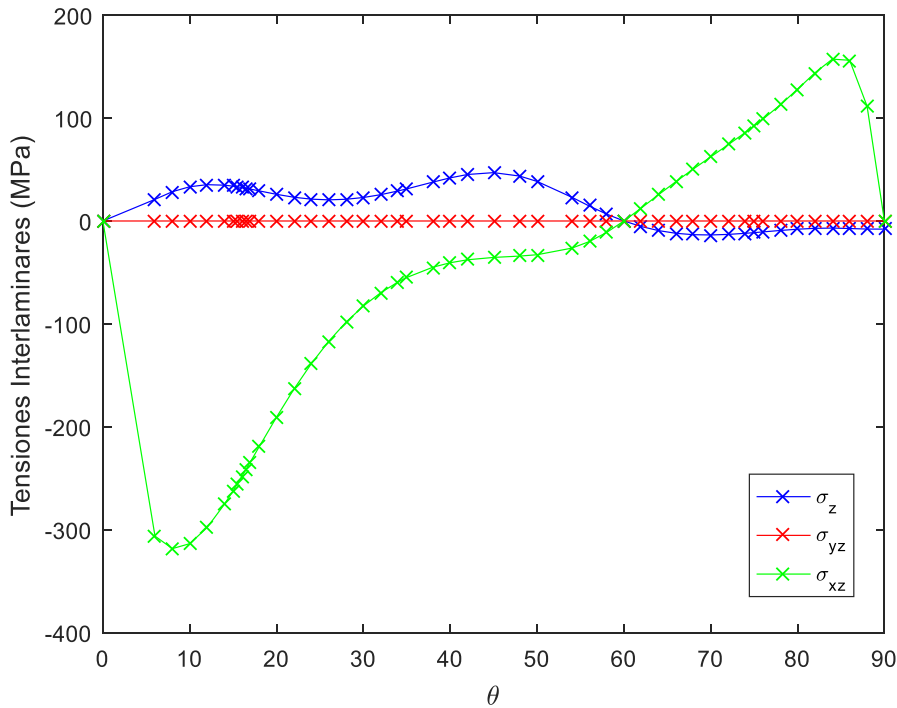
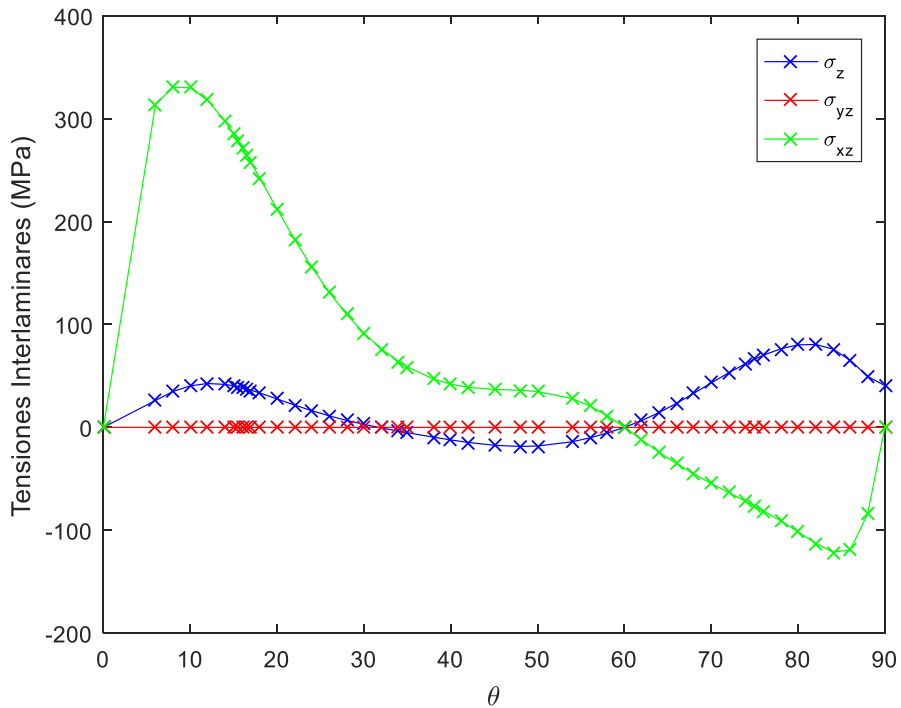


Figura 3.36. Tensiones interlaminares en el borde libre en la interfase. Secuencia  $[2\theta, -\theta]_s$



**Figura 3.37. Tensiones interlaminares en el borde libre en la interfase. Secuencia  $[-\theta, 2\theta]_s$**

En la secuencia  $[2\theta, -\theta]_s$  (Figura 3.36) y en la secuencia  $[-\theta, 2\theta]_s$  (Figura 3.37), la componente de tensión  $\sigma_{xz}$  cambia de signo para una orientación de  $60^\circ$ , pasando de negativa a positiva en el primer caso, y de positiva a negativa en el segundo. La componente de tensión de cortadura vuelve a ser dominante en este caso, encontrándose sus máximos relativos en  $\theta = 8^\circ$  y  $\theta = 85^\circ$ .

La componente  $\sigma_z$  también cambia de signo para el mismo valor de la inclinación, pasando de tracción a compresión en el primer caso ( $[2\theta, -\theta]_s$ ). En el segundo caso ( $[-\theta, 2\theta]_s$ ), la componente de tensión normal es de tracción en los intervalos de  $(0^\circ, 30^\circ)$  y  $(60^\circ, 90^\circ)$  mientras que es de compresión en el intervalo intermedio de  $(30^\circ, 60^\circ)$ .

En este caso, el cambio de la secuencia de apilamiento produce un cambio en la distribución de los estados de inclinación favorables a la aparición de delaminación. En el primer caso, se tienen dos máximos relativos para  $\sigma_z$ , uno en  $\theta = 12^\circ$  y el otro en  $\theta = 45^\circ$  mientras que en el segundo caso se tienen dos máximos relativos uno en  $\theta = 12^\circ$  y otro en  $\theta = 82^\circ$ .

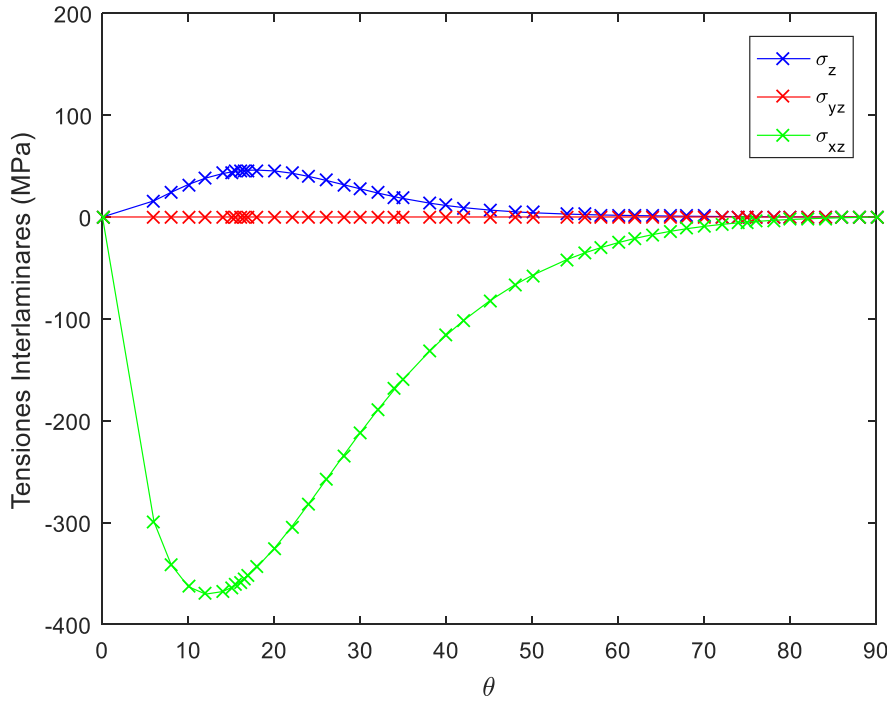


Figura 3.38. Tensiones interlaminares en el borde libre en la primera interfase. Secuencia  $[\theta, \theta, -\theta]_s$

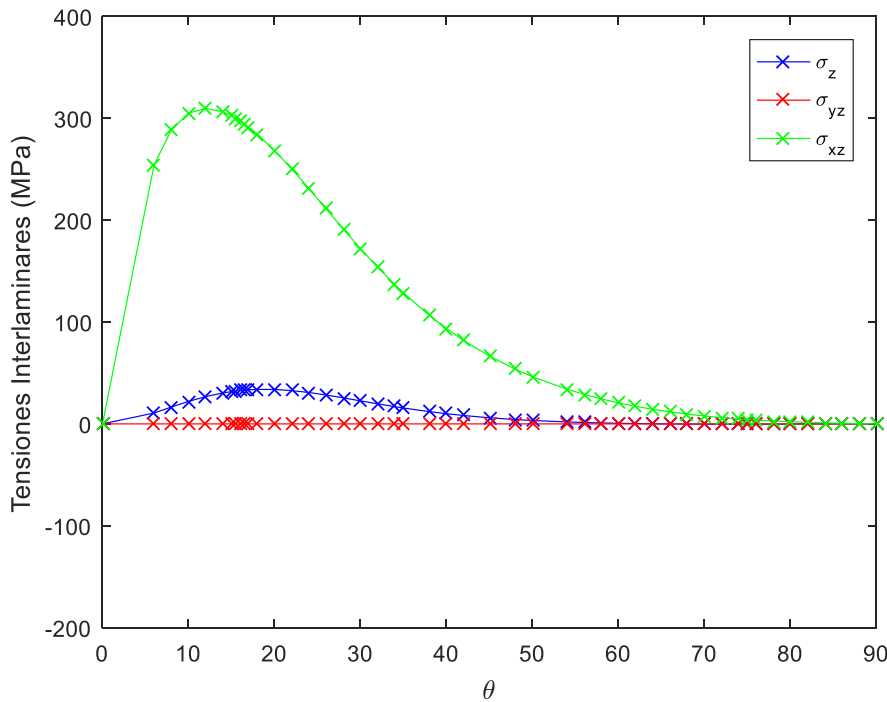


Figura 3.39. Tensiones interlaminares en el borde libre en la primera interfase. Secuencia  $[\theta, -\theta, \theta]_s$

Los valores representados en la Figura 3.38 y en la Figura 3.39 son muy similares aunque algo superiores a los mostrados para los casos de las secuencias de apilamiento de  $[\theta, -\theta]_s$  y  $[-\theta, \theta]_s$ . La tensión de cortadura  $\sigma_{xz}$  vuelve a ser dominante en todo el proceso, encontrando su máximo en  $\theta = 12^\circ$  y no cambiando de signo en todo el intervalo de análisis. Para la secuencia  $[\theta, \theta, -\theta]_s$ , toma valores negativos mientras que para la secuencia  $[\theta, -\theta, \theta]_s$ , toma valores positivos.

En cuanto a la componente normal de tensión  $\sigma_z$  vuelve a ser de tracción en todo el intervalo de estudio y no cambia de signo. Además, el cambio de secuencia de apilamiento no afecta ni a los valores que alcanza ni al signo de los mismos. Tiene un máximo en  $\theta = 18^\circ$  y vuelve a ser un orden de magnitud inferior a la tensión de cortadura.

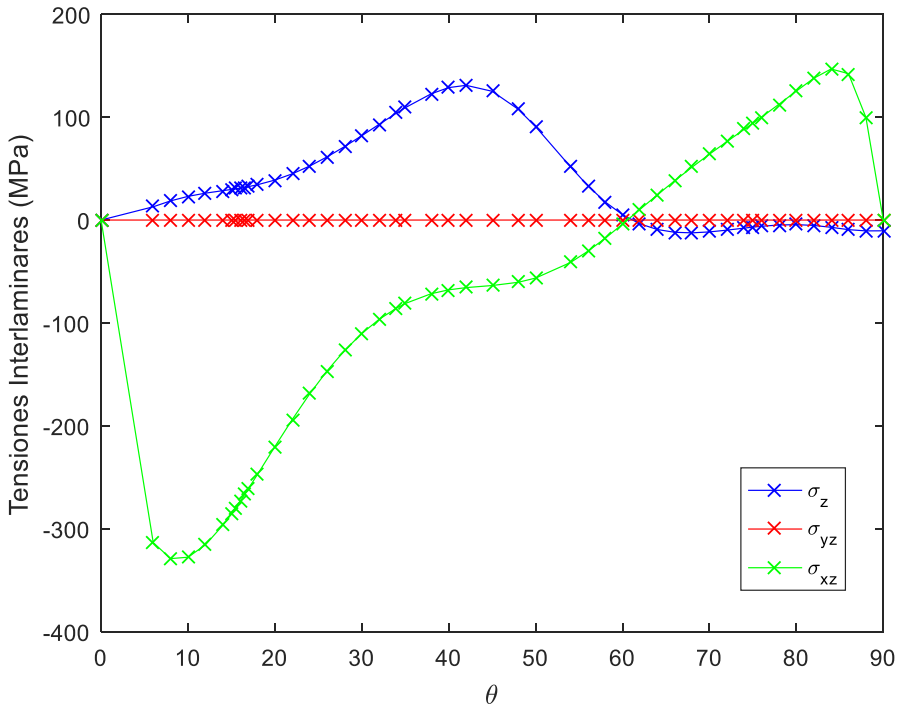
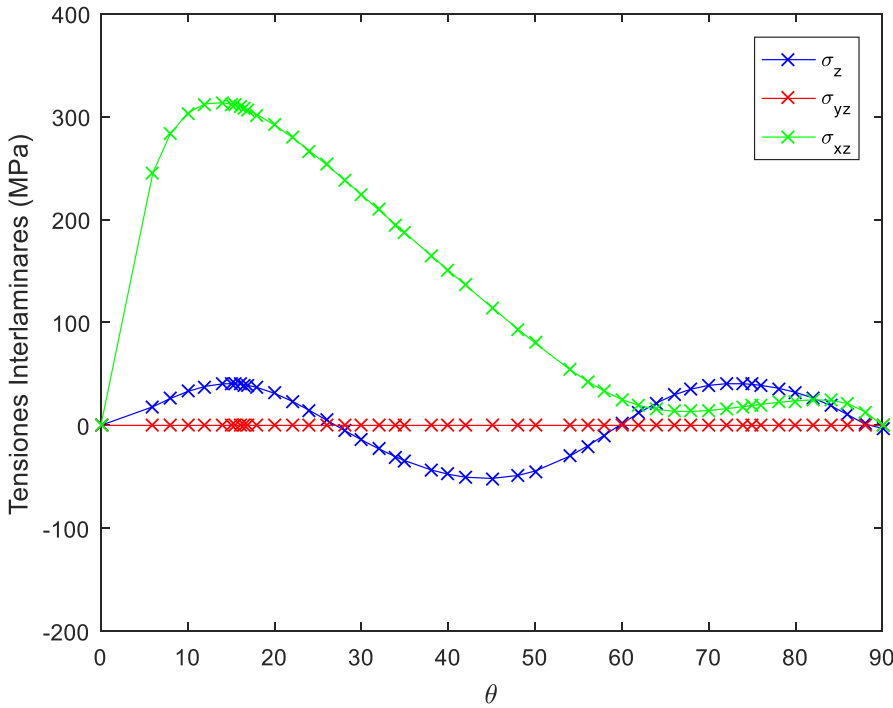


Figura 3.40. Tensiones interlaminares en el borde libre en la primera interfase. Secuencia  $[\theta, 2\theta, -\theta]_s$



**Figura 3.41. Tensiones interlaminares en el borde libre en la primera interfase. Secuencia  $[\theta, -\theta, 2\theta]_s$**

La tensión de cortadura  $\sigma_{xz}$  que se muestra en la Figura 3.40, para la secuencia de apilamiento  $[\theta, 2\theta, -\theta]_s$ , presenta dos máximos relativos, uno en  $\theta = 8^\circ$  y otro en  $\theta = 84^\circ$ , y un cambio de signo de negativo a positivo en  $\theta = 60^\circ$ . Alcanza valores que son dos veces los valores que alcanza la tensión normal. Dicha tensión normal es de tracción en el intervalo  $(0^\circ, 61^\circ)$  y de compresión en el intervalo  $(61^\circ, 90^\circ)$  presentando un máximo de tracción en  $\theta = 42^\circ$ . Los valores de la tensión  $\sigma_z$  relativos a la tensión de cortadura son mayores que los encontrados para los otros casos.

La situación, para la secuencia  $[\theta, -\theta, 2\theta]_s$ , es diferente según la Figura 3.41. La tensión de cortadura no cambia de signo siendo positiva en todo el intervalo de análisis y presentando un máximo para una inclinación de  $14^\circ$ . En cuanto a la tensión normal presenta dos intervalos de tracción que son  $(0^\circ, 27^\circ)$  y  $(60^\circ, 90^\circ)$  mientras que el intervalo intermedio es de compresión. El máximo de compresión se da en  $\theta = 45^\circ$  mientras que los máximos relativos de tracción se dan en las inclinaciones  $\theta = 15^\circ$  y  $\theta = 74^\circ$ .

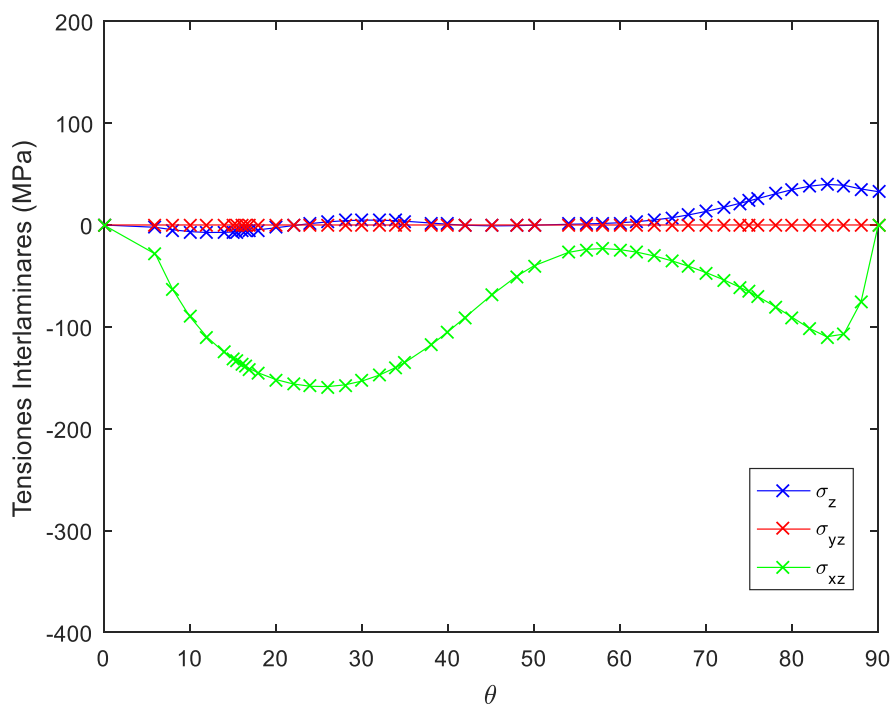


Figura 3.42. Tensiones interlaminares en el borde libre en la segunda interfase. Secuencia  $[\theta, 2\theta, -\theta]_s$

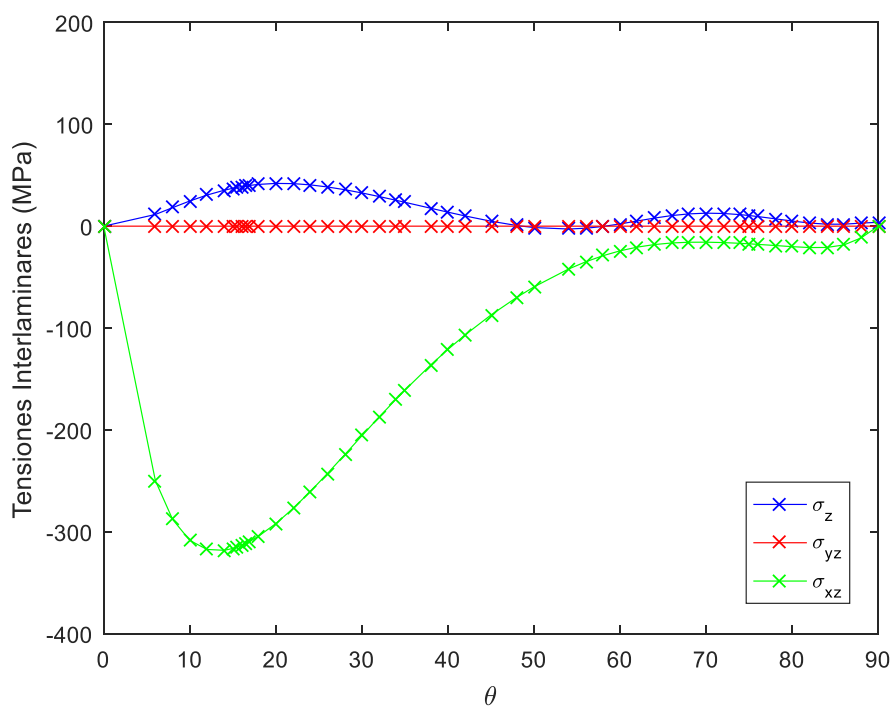


Figura 3.43. Tensiones interlaminares en el borde libre en la segunda interfase. Secuencia  $[\theta, -\theta, 2\theta]_s$

En la Figura 3.42, se muestra el valor de las tensiones interlaminares para la secuencia  $[\theta, 2\theta, -\theta]_s$  en la segunda entrecara. Como se observa, los valores de todas las tensiones se ven reducidos a la mitad. Este hecho es lógico ya que, por condición de contorno, las tensiones  $\sigma_z$  y  $\sigma_{xz}$ , deben anularse en la superficie libre superior ( $z = 2h_o$ ) por lo que deben ir reduciéndose conforme nos acercamos a la cara superior del laminado.

La tensión de cortadura no cambia de signo, siendo negativa en todo el intervalo de estudio. Presenta dos máximos relativos, uno  $\theta = 26^\circ$  y otro en  $\theta = 84^\circ$ . Por el contrario, la componente normal de tensión es prácticamente nula en el intervalo  $(0^\circ, 60^\circ)$  volviéndose de tracción en el intervalo  $(60^\circ, 90^\circ)$ . En este último intervalo presenta un máximo en  $\theta = 84^\circ$ .

Finalmente, las tensiones interlaminares en la segunda entrecara para la secuencia  $[\theta, -\theta, 2\theta]_s$ , se muestran en la Figura 3.43. En este caso, los valores para la tensión de cortadura son mayores que los observados para la secuencia  $[\theta, 2\theta, -\theta]_s$  aunque tampoco cambian de signo en todo el intervalo. Se tiene un máximo en  $\theta = 13^\circ$ . En cuanto a la tensión normal se tienen valores de tracción en el intervalo  $(0^\circ, 50^\circ)$ , dándose su valor máximo en  $\theta = 20^\circ$ , mientras que encontramos valores prácticamente nulos en el intervalo  $(50^\circ, 90^\circ)$ .

### 3.9. Conclusiones del capítulo

En este tercer capítulo, se han descrito los pasos que se han seguido para elaborar una herramienta que permite determinar las tensiones fuera del plano que aparecen en laminados simétricos cuando se someten a estados de tracción uniaxial en su plano.

A partir de una revisión del estado del arte que va desde los trabajos pioneros, que proponían esquemas numéricos clásicos, hasta los esquemas de elementos finitos que permiten aportar, con un elevado grado de detalle, las formas de las tensiones interlaminares cerca del borde libre, se ha construido una herramienta que permite estudiar de forma sistemática tanto diferentes laminados como diversas secuencias de apilamiento, cuando se varía la orientación de las fibras en el seno de las láminas componentes.

En este sentido, en el desarrollo de esta herramienta, se ha sacrificado grado de detalle y la posibilidad de analizar casos generales, por la capacidad de hacer un estudio sistemático de diversas secuencias de apilamiento e inclinaciones de las fibras para un caso de carga concreto y un conjunto definido de hipótesis simplificadoras con un coste computacional bajo.

Aunque se ha mostrado la capacidad de la herramienta de reproducir los estados tensionales, deformaciones y campo de desplazamientos en todos los puntos materiales del laminado, el estudio comparativo final se ha centrado en el borde libre a la altura de las interfases entre láminas con fibras orientadas según inclinaciones distintas. Este último aspecto es debido a que se ha encontrado que la zona del borde libre a la altura de las interfases es la zona donde potencialmente se desarrollarán los máximos de las tensiones y, por tanto, son zonas sensibles al comienzo de mecanismos de fallo tales como la delaminación o la rotura transversal por cortadura.



Los resultados obtenidos con la herramienta desarrollada se han mostrado independientes del número de puntos de la malla propuesta y se ha demostrado el carácter singular de las tensiones, en puntos cercanos al borde libre en las entrecaras. La solución singular en esta zona conlleva grandes variaciones en puntos discretos materiales que distan poco entre ellos. Este carácter singular conforma lo que se conoce como efecto de borde.

Además, tal y como se anticipa en otras referencias, esta solución permite superar las dificultades que la Teoría del Laminado acarrea, ya que permite satisfacer la condición de borde libre de tensiones en los contornos del laminado y desbloquear la posibilidad de que proliferen las tensiones fuera del plano en las cercanías del borde libre.

Para validar los resultados obtenidos con la herramienta, se ha realizado una comparativa con los resultados encontrados en la literatura para los mismos laminados. Se ha encontrado que si bien, el detalle de la evolución de las tensiones es mucho más preciso cuando se utilizan elementos finitos cuadráticos, la forma cualitativa y el rango de los valores son bien capturados cuando se utiliza el esquema que se propone.

Las formas de los campos de desplazamiento también han sido validadas mediante ensayos de laboratorio. Para ello, se ha comparado el valor del campo de desplazamiento longitudinal en puntos situados en los bordes laterales del laminado, en la superficie superior, con respecto al valor del desplazamiento en el punto central conformando un gradiente. Estos valores, determinados mediante técnicas ópticas, han sido extraídos a partir de un ensayo de tracción de un laminado con una secuencia de apilamiento concreta y diferentes inclinaciones de la fibra, y han sido correlados con los resultados numéricos que se obtienen, para los mismos parámetros geométricos y el mismo grado de deformación, usando la herramienta desarrollada. Se ha encontrado un buen acuerdo entre los resultados.

El material utilizado en el ensayo y cuyas propiedades fueron determinadas en el laboratorio en un trabajo anterior, ha permitido considerar los gradientes de desplazamiento longitudinal para las diversas orientaciones como una manifestación empírica de la presencia de las tensiones fuera del plano. Así, el método desarrollado, validado experimentalmente, permite determinar de una manera sencilla y con un coste computacional bajo, qué inclinaciones (para una secuencia de apilamiento concreta) son más proclives a desarrollar mayores tensiones.

Para finalizar el análisis, se ha realizado un estudio sistemático consistente en determinar las tensiones interlaminares a la altura de las entrecaras, en el borde libre para dos laminados simétricos, dos de cuatro láminas y otros dos de seis láminas, cuando se varía la orientación de las fibras. El estudio ha sido realizado para ocho secuencias de apilamiento diferentes. En el caso de los laminados de seis láminas, las tensiones fueron determinadas en la primera de las interfases. Particularmente, en el caso del segundo laminado, también en la segunda.

Los resultados obtenidos para todas las orientaciones y secuencias de apilamiento han sido comparados, observando cómo cambian los máximos y mínimos de las tensiones, además de determinar qué orientaciones producen tensiones normales de tracción contribuyendo a la delaminación.

Los razonamientos que se han seguido para la construcción de la herramienta no están exentos de simplificaciones, las cuales han sido descritas con detalle en el presente capítulo. Por este motivo, el esquema de resolución propuesto presenta una serie de limitaciones que

derivan fundamentalmente de dichas hipótesis simplificativas y del hecho de haber considerado un caso de análisis concreto. En esta línea, se hacen las siguientes puntualizaciones:

- El esquema de diferencias finitas utilizado deviene en un algoritmo programable de forma inmediata gracias a la homogeneidad de la disposición de los puntos discretos de la malla. La necesidad de disponer de mallas que no sean homogéneas y que permitan aumentar la resolución en zonas donde se quiera una mayor precisión de los resultados requiere el uso de otro tipo de métodos de análisis.
- Asimismo, el estado de carga uniaxial presenta un caso muy particular que, si bien es el más representativo a la hora de caracterizar el comportamiento mecánico de un laminado, representa un caso improbable en cualquier aplicación en la industria. Por ello, y de nuevo, se hace necesario un método de análisis que permita introducir estados de carga y condiciones de contorno generales.
- Las geometrías rectangulares características de los laminados que se han considerado son condición sin la cual hubiera sido imposible discretizar, de una forma sistemática, y reducir por simetría el dominio bajo estudio. Aunque esto, en principio, es una ventaja se convierte en una limitación cuando se quieren estudiar laminados que tengan oquedades, fisuras o taladros.
- Aunque se ha expuesto la distribución de tensiones, deformaciones y desplazamientos en todos los puntos del dominio bajo estudio, los cálculos efectuados se han realizado en régimen elástico. Si bien los valores de las tensiones en dicho régimen son suficientes para determinar qué orientaciones son más favorables para desarrollar mecanismos de fallo, el comportamiento más allá del régimen elástico requiere implementar procesos iterativos que resuelvan problemas no lineales.
- Se parte de la presencia de un material cuyas constantes mecánicas son las correspondientes a un material homogéneo ortótropo. La existencia de mecanismos de fallo diferenciados para fibra y matriz requiere el uso de alguna teoría que permita construir las propiedades del material compuesto a partir de las propiedades de la fibra y la matriz que, a su vez, serán degradadas mediante algún modelo de degradación.

Por todas estas razones, se hace necesario implementar un método que permita analizar geometrías generales sometidas a condiciones de contorno y estados de carga cualesquiera. Este método es el conocido Método de los Elementos Finitos que deberá estar integrado en un soporte que permita resolver, de forma iterativa, problemas no lineales. Dicho método se describirá en el siguiente capítulo.

Como se ha dicho, la necesidad de describir el comportamiento de los laminados de material compuesto más allá de su régimen elástico y de forma diferenciada para la fibra y la matriz, requiere también algún soporte teórico que permita componer las propiedades del conjunto. Para este fin, se utiliza la llamada Teoría de Mezclas Serie/Paralelo que se describirá en el Capítulo 5 de esta tesis. Por último, el modelo de degradación que se utiliza cae dentro del grupo de los llamados modelos de daño continuo y se describe en detalle en el Capítulo 6.

## Bibliografía

- [1] Rizov, V. & Mladensky, A., "Mechanical behaviour of composite sandwich structures subjected to low velocity impact - Experimental testing and finite element modelling," *Polymers and Polymer Composites*, vol. 16, no. 4, pp. 233-240, 2008.
- [2] Koissin, V.; Skvortsov, V.; Krahmalev, S. & Shilpsha, A., "The elastic response of sandwich structures to local loading," *Composite Structures*, vol. 63, no. 3-4, pp. 375-385, 2004.
- [3] Carreira, R.P.; Caron J.F. & Diaz Diaz A., "Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations.," *Mechanics of Materials*, vol. 34, pp. 217-230, 2002.
- [4] Lagunegrand, L.; Lorriot, T.; Harry, R.; Wagnier, H. & Quenisset, J.M., "Initiation of free-edge delamination in composite laminates," *Composites Science and Technology*, vol. 66, pp. 1315-1327, 2006.
- [5] Sun, C. T. & Chu, G. D., "Reducing Free Edge Effect on Laminate Strength by Edge Modification," *Journal of Composite Materials*, vol. 25, no. 2, pp. 142-161, 1991.
- [6] Hawyes, V. J.; Curtis, P. T. & Soutis, C., "Effect of Impact on the Compressive Response of Composite Laminates," *Composites, Part A- Applied Science*, vol. 32, pp. 1263-1270, 2001.
- [7] Sihm, S.; Kim, R. Y.; Kawabe, K. & Tsai, S. W., "Experimental studies of thin-ply laminated composites," *Composites Science and Technology*, vol. 67, no. 6, pp. 996-1008, 2007.
- [8] de Freitas, M. & Reis, L., "Failure mechanisms on composite specimens subjected to compression after impact," *Composite Structures*, vol. 42, no. 4, pp. 365-373, 1998.
- [9] Islam, M.S. & Prabhakar, P., "Modeling framework for free edge in laminates under thermomechanical loading," *Composites Part B*, vol. 116, pp. 89-98, 2017.
- [10] Mignery, L.A.; Tan, T.M. & Sun C.T., "The Use of Stitching to Suppress Delamination in Laminated Composites. Delamination and Debonding," *American Society for Testing and Materials, Philadelphia*, vol. 876, pp. 371-385, 1985.
- [11] Chan, W.S.; Rogers C. & Aker, S., "Improvement of Edge Delamination Strength of Composite Laminates Using Adhesive Layers," *Composite Materials: Testing and Design (7th Conference)*. J. M. Whitney, ed., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, vol. 893, pp. 266-285, 1986.
- [12] Howard, W.E.; Gossard, Jr. T. & Jones R.M., "Composite laminate free-edge reinforcement with U-shaped caps," *Part I: Stress Analysis. AIAA J*, vol. 27, pp. 610-6, 1989.

- [13] Chan, W.S.; Rogers C.; Cronkhite, J. D. & Martin J., "Delamination Control of Composite Rotor Hubs," *J Am Helicopter Soc*, vol. 31, no. 3, pp. 60-9, 1986 .
- [14] D' Ottavio, M.; Vidal, P.; Valot, E. & Polit, O., "Assessment of plate theories for free-edge effects," *Composites: Part B*, vol. 48, pp. 111-121, 2013.
- [15] Dhanesh, N.; Kapuria, S. & Achary, G. G. S., "Accurate prediction of three-dimensional free edge stress field in composite laminates using mixed-field multiterm extended Kantorovich method," *Acta Mech*, vol. 228, pp. 2895-2919, 2017.
- [16] Flanagan, G., "An efficient stress function approximation for free-edge stresses in laminates," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 31, pp. 941-952, 1994.
- [17] Cho, M. & Yoon, J. Y., "Free-edge interlaminar stress analysis of composite laminates by extended Kantorovich method," *AIAA, J.*, vol. 37, pp. 656-660, 1999.
- [18] Zhang, D.; Ye, J. O.; Sheng, H. Y., "Free-edge and ply cracking effect in angle-ply laminated composites subjected to in plane loads," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 133, no. 12, pp. 1268-1277, 2007.
- [19] Lessard, L. B.; Schmidt, A. S.; & Shokrieh, M. M., "Three-dimensional stress analysis of free-edge effects in a simple composite cross-ply laminate," *International Journal Solids Structures*, vol. 33, no. 15, pp. 2243-2259, 1996.
- [20] Nguyen, V-T & Caron, J. F., "A new finite element for free edge effect analysis in laminated composites," *Computers and Structures*, vol. 84, pp. 1538-1546, 2006.
- [21] Esquej, R.; Castejon, L.; Lizaranzu, M.; Carrera, M.; Miravete, A. & Miralbes, R., "A new finite element approach applied to the free edge effect on composite materials," *Composite Structures*, vol. 98, pp. 121-129, 2013.
- [22] Fletcher, T. A.; Kim, T.; Dodwell, T. J.; Butler, R.; Scheichl, R. & Newley, R., "Resin treatment of free edges to aid certification of through thickness laminate strength," *Composite Structures*, vol. 146, no. 20, pp. 26-33, 2016.
- [23] Lindemann, J. & Becker, W., "Analysis of the free-edge effect in composite laminates by the boundary finite element method," *Mechanics of Composite Materials*, vol. 36, no. 3, pp. 208-214, 2000.
- [24] Pipes, R. B. & Pagano, N. J., "Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension," *Journal of Composite Materials*, vol. 4, pp. 538-548, 1970.
- [25] Hajikazemi, M. & Van Paepegem, W., "A variational model for free-edge interlaminar stress analysis in general symmetric and thin-ply composite laminates," *Composite Structures*, vol. 184, pp. 443-451, 2018.
- [26] Kant, T. & Swaminathan K., "Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - A selective review and survey of current developments," *Composite*

*Structures*, vol. 49, no. 1, pp. 65-75, 2000.

- [27] Mittelstedt, C. & Becker, W., "Interlaminar stress concentrations in layered structures: Part I - A selective literature survey on the free-edge effect since 1967," *Journal of Composite Materials*, vol. 38, no. 12, pp. 1037-1062, 2004.
- [28] Wang, A. S. D. & Crossman, F. W., "Some New Results on Edge Effect in Symmetric Composite Laminates," *Journal of Composite Materials*, vol. 11, no. 1, pp. 92-106, 1977.
- [29] Pipes, B., "Moiré Analysis of the Interlaminar Shear Edge Effects in Laminated Composites," *Journal of Composite Materials*, vol. 5, no. 2, pp. 255-259, 1971.
- [30] ASTM D3039/D3039M - 17 , "Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials," 2017.
- [31] Olmedo, A.; Santiuste, C. & Barbero, E., "An analytical model for predicting the stiffness and strength of pinned-joint composite laminates," *Composites Science and Technology*, vol. 90, pp. 67-73, 2014.

## 4. Soporte de Elementos Finitos





## 4.1. Introducción

En el Capítulo 3, se ha proporcionado una herramienta que permite obtener todas las componentes del tensor de tensiones para el caso de un laminado con una secuencia de apilamiento distribuida de forma simétrica y para un caso de deformación uniaxial impuesta. Mediante el uso de esta herramienta se ha probado que la presencia de las tensiones interlaminares en las inmediaciones de los bordes libres es fundamental a la hora de determinar el modo de fallo preferente que aparecerá y, por tanto, se hace necesario tenerlas en cuenta a la hora de predecir la carga de rotura y los niveles de deformación que se alcanzarán.

El esquema de diferencias finitas que se propuso en el capítulo tercero tiene la desventaja de servir sólo para un caso muy específico en donde el laminado no tiene concentradores de tensión, es simétrico y el caso de carga que se plantea es uno muy específico. Además, se consideró el material como un sólido homogéneo ortótropo el cual no permitiría distinguir el comportamiento diferenciado de fibra y matriz a la hora de estudiar el mecanismo de fallo desde un punto de visto micromecánico.

De esta manera y tal como se ha expuesto, el estudio del comportamiento de los materiales compuestos necesita de herramientas que sean capaces de manejar y obtener el valor de todas las magnitudes establecidas por las ecuaciones de la Mecánica del Medio Continuo que han sido ampliamente expuestas en la literatura, como por ejemplo en [1] o en [2].

Sin embargo, debido al amplio abanico de problemas, tipologías y condiciones de contorno que se pueden encontrar en las diversas aplicaciones, se hace necesario algún método que, aprovechando la potencia de cálculo que permite el uso de ordenadores, sea capaz de aportar sistemáticamente soluciones numéricas a los campos de tensiones y deformaciones.

Por este motivo, en esta tesis, se acomete la implementación de rutinas que apliquen dicho método a estructuras de tipo laminado, y que permita disponer de una forma de cálculo complementaria a los programas de software comercial disponibles para tal fin.

En concreto, se quiere determinar el estado tensional en laminados de material compuesto organizados mediante diferentes secuencias de apilamiento y orientaciones cualesquiera de las fibras. Además, se pretende considerar la presencia de agujeros o grietas que actuarán como concentradores de tensión. Se pretende también ser capaz de modelar el material compuesto desde un punto de vista micromecánico, considerando fibra y matriz por separado. Esta consideración permitirá evaluar la evolución de las historias tensionales, deformacionales y de los mecanismos de fallo de fibra y matriz que conllevarán en última instancia el fallo del laminado.

La herramienta desarrollada debe ser capaz de considerar diferentes condiciones de contorno y diferentes estados de carga. Estos a su vez pueden implicar, a través de los distintos mecanismos de fallo, la degradación de las propiedades de las láminas. Aunque los desarrollos que se realizarán en este capítulo tendrán una vocación de generalidad acabarán por aplicarse a problemas estáticos que evolucionarán según un régimen de pequeñas deformaciones donde puedan darse fenómenos no lineales que requerirán métodos iterativos de resolución.

En este capítulo se expondrán todos los aspectos necesarios para elaborar dicha herramienta. Ésta permitirá resolver el estado tensional y de deformación de los laminados sometidos a diferentes estados de carga. Para desarrollar esta herramienta se hace necesario conjugar cuatro funciones diferentes que actuando en conjunto permitirán ejecutar todas las tareas necesarias para modelar el problema que se aborda. Estas cuatro funciones son:

- Un método numérico que permita discretizar las ecuaciones de campo de la Mecánica de los Medios Continuos y que constituya una forma operativa que sea capaz de resolver los campos de desplazamientos. La fórmula elegida es el llamado **Método de los Elementos Finitos**. Esto implicará discretizar el dominio convenientemente, definir funciones de forma adecuadas y establecer una regla de cuadratura que permitirá aproximar las integrales que resulten.
- La proposición de una ley constitutiva que permita caracterizar al material compuesto y establezca las relaciones cinemáticas entre las deformaciones de fibra y matriz. Esto definirá las ecuaciones de cierre para poder constituir el sistema de ecuaciones a resolver. La ley constitutiva elegida será la dada por **la Teoría de Mezclas** en el Modelo Básico Serie/Paralelo. Esta ley será un soporte que permita considerar diferentes leyes de comportamiento entre fibra y matriz. Asimismo, permitirá modelar la ortotropía de la fibra a través de la consideración de una dirección que será a través de la cual se tenga comportamiento en paralelo y que coincidirá con la dirección en la que se encuentra dispuesta la fibra.
- Un modelo de **daño continuo isótropo** que tenga en cuenta la degradación de las propiedades de la fibra y la matriz. El modelo de daño elegido permitirá la utilización de leyes de ablandamiento exponencial o lineal y diferentes funciones umbrales de tensión. Este modelo de degradación producirá que el sistema resultante de la aplicación del Método de los Elementos Finitos sea no lineal y, por tanto, forzará la utilización de algún método iterativo de resolución.
- Un método iterativo que permita resolver el sistema no lineal que resultará de la aplicación del modelo de degradación. De este modo, el sistema de ecuaciones algebraicas que sería lineal y de fácil resolución adquirirá un carácter no lineal en donde los coeficientes de la matriz de rigidez dependerán del estado de deformación. En este trabajo se optará por **el Método de Newton-Raphson**.

## 4.2. El Método de los Elementos Finitos

De forma general, se puede decir que la inmensa mayoría de los fenómenos naturales vienen descritos, en los casos más sencillos por ecuaciones algebraicas, o bien a través de ecuaciones diferenciales o integrales que relacionan las magnitudes bajo estudio. El conocimiento actual de la física en conjunción con el resto de ciencias permite la posibilidad de formular, por complicados que sean los fenómenos implicados, casi cualquier tipo de problema.

En este amplio abanico, se pueden incluir desde la determinación de los valores del campo de velocidades y temperatura de un fluido que recorre las tuberías de un sistema hidráulico, a la descripción de las ondas de choque que recorren el extradós del ala de un avión, o el cálculo de los valores discretos de energía que pueden alcanzar los electrones en los orbitales de un átomo.

Sin embargo, si las posibilidades para formular un problema son casi infinitas, las capacidades analíticas para dar solución a las ecuaciones surgidas de estas formulaciones son bastante limitadas, sobre todo cuando se quiere dar al método de resolución un carácter general que sea capaz de resolver cualquier geometría sujeta a cualquier tipo de condición de contorno.

En este sentido, los métodos numéricos vienen a dar respuesta a estas limitaciones permitiendo solucionar muchos problemas diferentes. Un ejemplo vendría constituido por el método de las diferencias finitas utilizado en el capítulo anterior, que permite sustituir el sistema de ecuaciones diferenciales por un sistema algebraico de fácil resolución. Una descripción del método de las diferencias finitas puede encontrarse en [3].

Sin embargo, este método presenta la dificultad de no poder analizar funciones con gradientes de variación importantes ya que no permite utilizar mallas que no estén uniformemente distribuidas. Por otro lado, cuando los contornos del dominio no son rectilíneos o en su defecto no se pueden describir geométricamente de una forma concisa, la aplicación de las condiciones de contorno resulta imposible.

Otros métodos numéricos proponen considerar como incógnitas del problema una serie de coeficientes que ponderan una suma de formas funcionales que se proponen para ser la solución al problema. Sin embargo, la dificultad de los problemas integro diferenciales que se quieren resolver hace que sea habitual no poder encontrar formas funcionales que verifiquen las condiciones de contorno y permitan obtener una solución válida. Entre este tipo de métodos se encuentran el método de Galerkin o el Método de los Mínimos Cuadrados.

Frente a estas limitaciones surge el procedimiento llamado *Método de los Elementos Finitos* que permite mediante la consideración de la forma funcional del campo de desplazamientos y de una discretización adecuada del dominio, soslayar las dificultades descritas. Este método numérico es la técnica de cálculo por ordenador más extendida a la hora de abordar el tipo de problemas que se ha indicado. El primer trabajo de este método surge en 1956 debido a Clough que extendió los conceptos anteriormente utilizados en el análisis estructural de barras desarrollando, posteriormente, el método para analizar problemas de tensión plana [4] y más tarde con un carácter más general [5].

En este apartado, pretende darse una descripción somera, aunque autocontenida de dicho método sin pretender ahondar en todos sus aspectos ni en precisar las múltiples aplicaciones que tiene. Para descripciones completas del Método de los Elementos Finitos y todos los aspectos necesarios para su construcción y desarrollo de aplicaciones bajo las hipótesis de la Teoría de la Elasticidad y otros campos se puede consultar [6].

Aunque existen actualmente múltiples paquetes de software comercial que son capaces de ejecutar este método y que permiten resolver cualquier tipo de geometría, el coste de las licencias originales imposibilita muchas veces el acceso a los mismos. Además, debido a que este tipo de programas normalmente son concebidos como ‘cajas negras’, en general no se puede acceder al código principal para saber con precisión qué tipo de cálculos se están realizando o introducir mejoras o modificaciones en el código fuente.

Las tareas que debe realizar cualquier programa que aplique el Método de los Elementos Finitos, se resumen a continuación:

- **Discretización del dominio.** Proporcionar una lista ordenada de las coordenadas nodales y las conectividades que relacionen los nodos que conforman cada elemento.
- **Interpolación del campo de desplazamientos.** Se deben proponer funciones que interpolen los desplazamientos en cualquier punto del elemento a partir del valor de dicho campo en los nodos de cada elemento.
- **Obtención de deformaciones.** Las deformaciones se obtienen derivando los desplazamientos. La consideración de pequeñas deformaciones permitirá establecer relaciones lineales entre éstas y los desplazamientos mientras que serán no lineales si se consideran grandes deformaciones.
- **Consideración de una ley de comportamiento.** Es la relación que relaciona las tensiones con las deformaciones. Se pueden considerar diferentes tipos de comportamiento (elástico, plástico, isotrópico o anisótropo). También se puede considerar ablandamiento o endurecimiento o modelos de daño continuo.
- **Resolución del sistema.** El sistema obtenido habrá de ser resuelto invirtiendo la matriz de rigidez para despejar los desplazamientos nodales.
- **Visualización de resultados.** Una vez se obtienen los desplazamientos hay que recomponer los campos de deformaciones y tensiones. Dichos campos deben ser visualizados mediante un entorno gráfico apropiado.

La implementación de las rutinas desarrolladas en este trabajo seguirá un planteamiento modular que responda a las tareas que se acaban de describir. Este planteamiento permitirá, a la hora de introducir mejoras, localizar las modificaciones que se quieran hacer en el módulo

correspondiente, conservando el resto y haciendo que el código sea aplicable a una cantidad amplia de problemas.

En este trabajo, se utilizará la herramienta *GID* para modelar la geometría de los laminados, establecer su secuencia de apilamiento y obtener las matrices de conectividades y coordenadas nodales que serán utilizadas como entradas para las rutinas, preparadas para lanzarse en *matlab*. Además, esta misma herramienta servirá para visualizar los resultados que se obtengan tras la ejecución de las rutinas desarrolladas.

Aunque esta herramienta tendrá un espíritu generalista las necesidades de la presente tesis obligan a centrarse en resolver laminados de material compuesto constituidos por láminas cuyas fibras se encuentran orientadas en cualquier dirección. La tipología de los laminados permite aproximarse a la solución mediante la utilización de elementos isoparamétricos hexaédricos sobre funciones de forma de evolución lineal, para aproximar los desplazamientos. Se asumirán pequeñas deformaciones que se obtendrán mediante relaciones de derivación a partir de los desplazamientos.

En este capítulo se pretende hacer una descripción autocontenida de todos los aspectos teóricos necesarios para poder construir una herramienta que sea capaz, aplicando el Método de los Elementos Finitos, de analizar el estado tenso-deformacional de un sólido que se encuentre sometido a cualquier estado de carga estática y a cualquier juego de condiciones de contorno.

## El Teorema de los Trabajos Virtuales

Para asegurar que el Método de los Elementos Finitos resuelva el problema verificando las ecuaciones que gobiernan los medios continuos (ecuaciones de equilibrio y compatibilidad) se hace necesario que descansa sobre alguna forma combinada de estas ecuaciones. Esta forma es la que proporciona precisamente el Teorema de los Trabajos Virtuales y que desarrollaremos a continuación.

Antes de establecer dicho teorema se hace necesario definir el concepto de *desplazamiento virtual* que se asocia con un desplazamiento cualquiera que, aunque no sea el que realmente está teniendo lugar en el problema, es físicamente factible y, por tanto, es compatible con las condiciones de contorno que se tienen.

Este teorema establece la igualdad de la suma del trabajo de las fuerzas internas del sólido y la energía cinética que adquiere el mismo con el trabajo virtual que realiza un sistema de fuerzas exteriores en equilibrio que trabaja según un campo de desplazamientos virtual aplicado sobre los puntos del sólido. El sistema de fuerzas puede estar compuesto por fuerzas de volumen y fuerzas aplicadas sobre la superficie.

A continuación, se considera un sólido sobre el que hay aplicado un sistema de fuerzas (unas fuerzas por unidad de superficie en el contorno  $\bar{t}_c$  y unas fuerzas por unidad de volumen  $\bar{X}$ ) que se encuentran en equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio dinámico que deben verificar las componentes de tensión son:

$$\begin{aligned}
 X_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} \\
 X_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} \\
 X_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial \dot{w}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

Donde  $\rho$  es la densidad del sólido y  $u$ ,  $v$ , y  $w$  son las componentes del campo de desplazamientos de dicho sólido. Si se impone un campo de desplazamientos virtual  $\vec{\delta}(x, y, z) = u^\delta(x, y, z)\vec{i} + v^\delta(x, y, z)\vec{j} + w^\delta(x, y, z)\vec{k}$ , y se multiplican cada una de las tres ecuaciones (4-1) por cada una de las componentes virtuales de desplazamiento respectivamente y se suman:

$$\begin{aligned}
 &\int_V (X_x u^\delta + X_y v^\delta + X_z w^\delta) dV + \int_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) u^\delta dV \\
 &\quad + \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) v^\delta dV + \\
 &+ \int_V \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w^\delta dV = \int_V \rho \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} u^\delta + \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} v^\delta + \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} w^\delta \right) dV
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u^\delta = \frac{\partial(\sigma_x u^\delta)}{\partial x} - \sigma_x \frac{\partial(u^\delta)}{\partial x} = \frac{\partial(\sigma_x u^\delta)}{\partial x} - \sigma_x \varepsilon_x^\delta \tag{4-3}$$

Donde se ha definido:

$$\varepsilon_x^\delta = \frac{\partial(u^\delta)}{\partial x} \tag{4-4}$$

Donde (4-4) representa la primera componente de un tensor de deformaciones obtenida derivando la primera componente del campo de desplazamiento virtual con respecto a 'x'. Análogamente:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_y^\delta &= \frac{\partial(v^\delta)}{\partial y} \\
 \varepsilon_z^\delta &= \frac{\partial(w^\delta)}{\partial z} \\
 \gamma_{xy}^\delta &= \left( \frac{\partial(u^\delta)}{\partial y} + \frac{\partial(v^\delta)}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz}^\delta &= \left( \frac{\partial(u^\delta)}{\partial z} + \frac{\partial(w^\delta)}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{4-5}$$

$$\gamma_{yz}^\delta = \left( \frac{\partial(v^\delta)}{\partial z} + \frac{\partial(w^\delta)}{\partial y} \right)$$

Y sustituyendo en (4-2) se tiene que:

$$\begin{aligned} & \int_V (X_x u^\delta + X_y v^\delta + X_z w^\delta) dV \\ & + \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u^\delta + \sigma_{xy} v^\delta + \sigma_{xz} w^\delta) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} u^\delta + \sigma_y v^\delta + \sigma_{yz} w^\delta) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xz} u^\delta + \sigma_{yz} v^\delta + \sigma_z w^\delta) \right] dV \\ & - \int_V [\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \sigma_{xy} \gamma_{xy}^\delta + \sigma_{xz} \gamma_{xz}^\delta + \sigma_{yz} \gamma_{yz}^\delta] dV \\ & = \int_V \rho \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} u^\delta + \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} v^\delta + \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} w^\delta \right) dV \end{aligned} \quad (4-6)$$

Transformando la integral de volumen que aparece en el segundo sumando en una integral de superficie, a través del Teorema de Gauss, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u^\delta + \sigma_{xy} v^\delta + \sigma_{xz} w^\delta) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} u^\delta + \sigma_y v^\delta + \sigma_{yz} w^\delta) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xz} u^\delta + \sigma_{yz} v^\delta + \sigma_z w^\delta) \right] dV \\ & = \int_\Omega [(\sigma_x u^\delta + \sigma_{xy} v^\delta + \sigma_{xz} w^\delta) \cdot l + (\sigma_{xy} u^\delta + \sigma_y v^\delta + \sigma_{yz} w^\delta) \cdot m \\ & + (\sigma_{xz} u^\delta + \sigma_{yz} v^\delta + \sigma_z w^\delta) \cdot n] d\Omega \end{aligned} \quad (4-7)$$

Donde  $\Omega$  es el contorno del dominio mientras que  $l$ ,  $m$  y  $n$  representan, en cada punto, las coordenadas del vector normal a la superficie. Igualando las acciones exteriores  $\bar{t}_c$ , sobre la superficie, con las tensiones interiores se tiene, a través del Lema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n &= t_{cx} \\ \sigma_{xy} l + \sigma_y m + \sigma_{yz} n &= t_{cy} \\ \sigma_{xz} l + \sigma_{yz} m + \sigma_z n &= t_{cz} \end{aligned} \quad (4-8)$$

Y así, si se reescribe (4-7), utilizando (4-8):

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [(\sigma_x u^\delta + \sigma_{xy} v^\delta + \sigma_{xz} w^\delta) \cdot l + (\sigma_{xy} u^\delta + \sigma_y v^\delta + \sigma_{yz} w^\delta) \cdot m \\
 & \quad + (\sigma_{xz} u^\delta + \sigma_{yz} v^\delta + \sigma_z w^\delta) \cdot n] d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} [(\sigma_x l + \sigma_{xy} m + \sigma_{xz} n) \cdot u^\delta + (\sigma_{xy} l + \sigma_y m + \sigma_{yz} n) \cdot v^\delta \\
 & \quad + (\sigma_{xz} l + \sigma_{yz} m + \sigma_z n) \cdot w^\delta] d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} [t_{cx} \cdot u^\delta + t_{cy} \cdot v^\delta + t_{cz} \cdot w^\delta] d\Omega = \int_{\Omega} \bar{t}_c \cdot \vec{\delta} d\Omega
 \end{aligned} \tag{4-9}$$

Y utilizando la forma reducida que proporciona (4-9) se puede escribir (4-2) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \int_V \vec{X} \cdot \vec{\delta} dV + \int_{\Omega} \bar{t}_c \cdot \vec{\delta} d\Omega \\
 & \quad - \int_V [\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \sigma_{xy} \gamma_{xy}^\delta + \sigma_{xz} \gamma_{xz}^\delta + \sigma_{yz} \gamma_{yz}^\delta] dV \\
 & = \int_V \rho \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} u^\delta + \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} v^\delta + \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} w^\delta \right) dV
 \end{aligned} \tag{4-10}$$

El tercer sumando del primer miembro y el segundo miembro de (4-10) se pueden poner de las siguientes maneras:

$$\begin{aligned}
 & \int_V [\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \sigma_{xy} \gamma_{xy}^\delta + \sigma_{xz} \gamma_{xz}^\delta + \sigma_{yz} \gamma_{yz}^\delta] dV = \int_V \sigma : \varepsilon^\delta dV \\
 & \int_V \rho \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} u^\delta + \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} v^\delta + \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} w^\delta \right) dV = \int_V \rho \vec{a} \cdot \vec{\delta} dV
 \end{aligned} \tag{4-11}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \sigma & = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \\
 \varepsilon^\delta & = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^\delta & \varepsilon_{xy}^\delta & \varepsilon_{xz}^\delta \\ \varepsilon_{xy}^\delta & \varepsilon_y^\delta & \varepsilon_{yz}^\delta \\ \varepsilon_{xz}^\delta & \varepsilon_{yz}^\delta & \varepsilon_z^\delta \end{pmatrix} \\
 \vec{a} & = \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} \right)
 \end{aligned} \tag{4-12}$$

Y  $\sigma : \varepsilon^\delta$  representa el resultado de sumar el producto respectivo de las componentes de los tensores y  $\vec{a}$  representa la aceleración de los puntos del sólido. Para escribir lo anterior, se ha tenido en cuenta que:



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy}^{\delta} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy}^{\delta} \\
\varepsilon_{xz}^{\delta} &= \frac{1}{2} \gamma_{xz}^{\delta} \\
\varepsilon_{yz}^{\delta} &= \frac{1}{2} \gamma_{yz}^{\delta}
\end{aligned}
\tag{4-13}$$

Finalmente, con todas estas consideraciones se tiene para (4-2):

$$\int_V \vec{X} \cdot \vec{\delta} dV + \int_{\Omega} \vec{t}_c \cdot \vec{\delta} d\Omega = \int_V \sigma : \varepsilon^{\delta} dV + \int_V \rho \vec{a} \cdot \vec{\delta} dV
\tag{4-14}$$

Éste es el llamado **Teorema de los Trabajos Virtuales**. Se trata de una forma débil de las ecuaciones de equilibrio que se formula integrando para todo el dominio de interés y es la base sobre la que se construye el Método de los Elementos Finitos.

Este teorema garantiza que el trabajo virtual de deformación de las fuerzas internas más el trabajo mecánico debido al movimiento como sólido rígido es igual al trabajo del sistema de cargas exteriores más el trabajo de las fuerzas de volumen.

Es importante notar el grado de generalidad de la expresión (4-14). Primeramente, se tiene que el sistema de cargas exteriores  $\vec{t}_c$  y las tensiones  $\sigma$  están relacionadas simplemente mediante la condición de equilibrio externo mientras que las fuerzas de volumen  $\vec{X}$  están ligadas a las tensiones únicamente mediante las ecuaciones de equilibrio interno.

En segundo lugar, los desplazamientos virtuales están ligados con las deformaciones a través de las ecuaciones de compatibilidad (4-4) y (4-5). La única condición que se le exige a estos campos es que sean compatibles con las condiciones de contorno del problema real.

En tercer lugar, si el problema fuera estático o cuasi estático en su defecto ( $\vec{a} \approx 0$  comparado con el resto de los términos) bastaría con prescindir del segundo sumando del segundo miembro.

En cuarto lugar, se tiene que (4-14) es aplicable a cualquier tipo de ley de comportamiento ya que hasta este punto no se ha hecho referencia a ninguna ley en concreto. Este hecho indica que el teorema es válido para comportamientos elástico, plástico...etc.

Evidentemente, el teorema también es aplicable cuando los campos de deformaciones son los correspondientes a las tensiones que se desarrollan según una determinada ley de comportamiento. Expresiones similares para este teorema y otras correspondientes a teoremas equivalentes pueden encontrarse en [7] o en [8].

## Aspectos termodinámicos

Para sustentar adecuadamente cualquier subrutina que resuelva el problema y que represente un modelo constitutivo físicamente válido es necesario que las ecuaciones utilizadas respondan a los principios básicos que impone la termodinámica.

Estas relaciones son los equilibrios energéticos que proponen los llamados Primer y Segundo Principio de la Termodinámica y, por tanto, plantean la necesidad de cumplimiento de un balance energético a nivel global. Dado su carácter fundamental deberán tener un reflejo en cualquier sistema de ecuaciones que pretenda establecer una relación entre las magnitudes relevantes de cualquier proceso físico.

Esta correspondencia se asegura incluso cuando las relaciones se establecen a escala microscópica entre las magnitudes físicas que representan el estado de movimiento a nivel molecular en un fluido o en una correspondencia micromecánica construida desde las bases de la mecánica estadística.

A modo de ejemplo, en el caso de las magnitudes cinemáticas de las partículas en el seno de un fluido, pueden encontrarse descripciones de este tipo en [9] o en [10] cuando se trata de establecer una correspondencia entre la mecánica estadística y la termodinámica.

En este apartado, se pretende indicar cuáles son los aspectos que deben ponerse de manifiesto para poder estar seguros de que las relaciones que se utilizarán en las rutinas desarrolladas están de acuerdo con los principios de la termodinámica. De nuevo no se pretende hacer una descripción profunda de dichos principios y sus aplicaciones sino una exposición clara y operativa que permita establecer el cumplimiento de dichos principios a la hora de resolver los problemas en los que estamos interesados. Para una descripción más pormenorizada de estos aspectos se puede consultar [11].

El *Primer Principio de la Termodinámica* establece que el incremento temporal de la energía interna  $\Delta U$  de un sistema cerrado (entendiendo por cerrado que no permite la entrada o salida de masa a través de sus fronteras) es igual a la potencia de deformación  $\dot{W}^1$  aportada por las fuerzas externas, que pueden ser tanto de volumen como de superficie, más la potencia calórica  $\dot{Q}$  aportada por las fuentes de calor que se encuentren en el seno del sistema y/o de la potencia calorífica aportada a través de las fronteras del mismo.

La expresión matemática de este principio se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d\Delta U}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (4-15)$$

Estas magnitudes globales se calcularán por integración a partir de las magnitudes específicas. En el caso de la energía interna se tiene la siguiente integral que la define a partir de la energía interna por unidad de masa  $e \left( \frac{J}{kg} \right)^2$  definida como una función de estado:

---

<sup>1</sup> Los signos en las magnitudes que se definen son muy importantes ya que establecen si la energía se aporta al sistema o se evacúa, produciendo incrementos o decrementos de la energía interna del mismo que deben estar definidos por un criterio de signos consistente.

<sup>2</sup> Se incluyen las unidades entre paréntesis.

$$\frac{d\Delta U}{dt} \left( \frac{J}{s} \right) = \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV \quad (4-16)$$

En el caso del calor aportado, se calcula a través de:

$$\dot{Q} \left( \frac{J}{s} \right) = \int_V \rho \omega dV - \int_{\Omega} \bar{q} \cdot \vec{n} d\Omega \quad (4-17)$$

Donde  $\omega \left( \frac{J}{kg \cdot s} \right)$  son las fuentes de calor internas por unidad de masa y tiempo,  $\bar{q} \left( \frac{J}{m^2 \cdot seg} \right)$  es el vector flujo de calor a través de la frontera y  $\vec{n}$  es la normal saliente a la superficie. El signo negativo del segundo sumando responde al hecho de que un flujo de calor entrante a través de la frontera tendrá un sentido opuesto a la normal saliente a la superficie.

En cuanto a la potencia de deformación  $\dot{W}$  se calcularía a partir del balance de la potencia aportada al sistema  $\dot{W}_{int}$  debido a la presencia de las fuerzas por unidad de volumen  $\vec{X}$  y a las fuerzas en el contorno  $\bar{t}_c$ . Este balance se efectuará de la siguiente manera:

$$\dot{W}_{int} = \int_{\Omega} \bar{t}_c \cdot \vec{u} d\Omega + \int_V \vec{X} \cdot \vec{u} dV \quad (4-18)$$

Pero, utilizando el Lema de Cauchy expresado en (4-8) y el teorema de Gauss para transformar la integral de superficie en (4-18) en una de volumen, se puede escribir:

$$\int_{\Omega} \bar{t}_c \cdot \vec{u} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} d\Omega = \int_V \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \sigma) dV \quad (4-19)$$

Para conseguir desarrollar más la expresión (4-19) se hace útil pasar a notación indicial. De esta manera:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \sigma) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\dot{u}_i \sigma_{ij}) dV = \int_V \left[ \dot{u}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right] dV \quad (4-20)$$

A continuación, utilizando las ecuaciones de equilibrio (4-1) se puede seguir desarrollando (4-20):

$$\int_V \left[ \dot{u}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right] dV = \int_V \left[ \dot{u}_i \left( \rho \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} - X_i \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right] dV \quad (4-21)$$

Y finalmente notando que el primer término del segundo miembro de (4-21) corresponde a la potencia cinética del sólido:

$$\int_V \dot{u}_i \left( \rho \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} \right) dV = \int_V \rho \dot{u}_i a_i dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \right) dV = \dot{K} \quad (4-22)$$

Sustituyendo (4-22) en (4-21) y ésta a su vez en (4-18):

$$\dot{W}_{int} = \dot{K} - \int_V \dot{u}_i X_i dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} dV + \int_V X_i \dot{u}_i dV = \dot{K} + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} dV \quad (4-23)$$

O en la notación original se tendrá finalmente:

$$\dot{W}_{int} = \int_V \rho (\vec{a} \cdot \vec{u}) dV + \int_V \sigma : \nabla \vec{u} dV \quad (4-24)$$

Finalmente, conviene hacer la siguiente observación derivada del hecho de que el tensor gradiente espacial de la deformación  $\nabla \vec{u}$  se puede escribir como la suma de un tensor simétrico llamado tensor gradiente de la velocidad y otro antisimétrico llamado tensor de vorticidad:

$$\nabla \vec{u} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) = D_{ij} + \Omega_{ij} \quad (4-25)$$

Y, por tanto, se tendrá que dado que el tensor de tensiones es simétrico en (4-12) podemos tener en cuenta que  $\sigma_{ij} \Omega_{ij} = 0$ :

$$\int_V \sigma : \nabla \vec{u} dV = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) dV = \int_V \sigma : D dV \quad (4-26)$$

Pero como precisamente  $\int_V \sigma : D dV$  representa la potencia de deformación  $\dot{W}$ , finalmente se tiene para (4-18):

$$\dot{W}_{int} = \int_V \rho (\vec{a} \cdot \vec{u}) dV + \int_V \sigma : D dV = \dot{K} + \dot{W} \quad (4-27)$$

Y, por tanto, la potencia de deformación se calculará despejando de (4-27):

$$\dot{W} = \dot{W}_{int} - \dot{K} \quad (4-28)$$

Por lo que sustituyendo (4-16), (4-17) y (4-26) en la expresión del Primer Principio (4-15) se tiene finalmente que el balance energético quedaría:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = \int_V \rho \omega dV - \int_{\Omega} \bar{q} \cdot \vec{n} d\Omega + \int_V \sigma : D dV \quad (4-29)$$

Que transformando la integral de superficie del segundo miembro en una de volumen volviendo a usar el teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} \bar{q} \cdot \vec{n} d\Omega = \int_V \nabla \cdot \bar{q} dV \quad (4-30)$$

Esto último permitirá obtener la forma fuerte del Primer Principio de la Termodinámica sustituyendo (4-30) en (4-29) y notando que como (4-29) debe cumplirse para cualquier dominio de integración también debe ser cierta cuando se aplica a los elementos de su integrando:

$$\rho \dot{e} = \rho \omega - \nabla \cdot \bar{q} + \sigma : D \quad (4-31)$$

De este modo, se tiene una forma operativa del Primer Principio de la Termodinámica. El significado físico de la forma (4-31) heredado evidentemente de la forma (4-15) indica que la potencia de deformación producida por las tensiones que aparecen cuando el sólido se deforma más la potencia calorífica producen el cambio temporal de energía interna en el sólido.

Otro aspecto interesante y que conecta este Primer Principio con el Teorema de los Trabajos Virtuales, es el que se deriva de la expresión (4-28). Esta ecuación indica que la variación en el tiempo del trabajo aportado al sólido deformable dado por (4-18), se invierte en deformarlo a través de la potencia de deformación dada por (4-26), más una potencia cinética que produce la aceleración del sólido. Evidentemente cuando el trabajo de deformación es nulo, el término cinético representa la aceleración de las partículas como sólido rígido.

Adicionalmente se puede hacer una identificación total del balance representado por (4-28) con el Teorema de los Trabajos Virtuales dado por (4-14). Siendo éste una versión del balance energético instantáneo de los trabajos desarrollados mientras que la versión dada por el Primer Principio representa un balance de la evolución temporal de dichos trabajos; efecto que se pone de manifiesto por el hecho de que (4-28) maneje potencias en lugar de trabajos como en el caso del Teorema de los Trabajos Virtuales.

Para poner de manifiesto esta equivalencia basta simplemente con identificar el campo virtual de desplazamientos y deformaciones con los campos reales, es decir, con hacer  $\varepsilon^\delta = \varepsilon$  y con  $\vec{\delta} = \vec{u}$ . Se obtendría sustituyendo en (4-14):

$$W_{int} = \int_V \vec{X} \cdot \vec{u} dV + \int_{\Omega} \bar{t}_c \cdot \vec{u} d\Omega = \int_V \sigma : \varepsilon dV + \int_V \rho \vec{a} \cdot \vec{u} dV \quad (4-32)$$

Estas dos consideraciones son perfectamente válidas ya que la única condición a cumplir por los campos virtuales para obtener el teorema era que fuesen compatibles con las condiciones de contorno del problema real. De todos los campos de desplazamientos virtuales que cumplen con las condiciones de contorno, el campo de desplazamientos de la solución del problema real es un caso particular y evidentemente será válido.

La identificación entre los términos es completa. El término dado por los primeros dos miembros de (4-32) corresponde al trabajo aportado al sólido  $W_{int}$  por el sistema de cargas y se corresponderá con la potencia desarrollada  $\dot{W}_{int}$  en (4-28). Por otro lado, el término  $\int_V \rho \vec{a} \cdot \vec{u} dV$  que representa el trabajo mecánico correspondería con la potencia cinética dada por el término  $\dot{K}$  mientras que el término  $\int_V \sigma : \varepsilon dV$  representa el trabajo de deformación en el Teorema de los Trabajos Virtuales y se corresponde con la potencia de deformación dada por el término  $\int_V \sigma : D dV$  de (4-28).

Como se ha visto, el Primer Principio establece el balance energético que tiene lugar cuando se aplica un sistema de cargas al sólido en estudio. Sin embargo, este principio no determina cual es el sentido del trasvase de energía. Para ello se hace necesario un principio adicional que dé información sobre el grado de asimilación de la energía por parte del sistema que es sometido a la acción de un sistema de cargas.

Esta función es precisamente la que desempeña el *Segundo Principio de la Termodinámica* que establece el balance de entropía del proceso que se está estudiando. La entropía total  $S \left( \frac{J}{K} \right)$  definida también como una función de estado, se calculará también a partir de la entropía específica del sistema  $s \left( \frac{J}{K \cdot kg} \right)$ :

$$S \left( \frac{J}{K} \right) = \int_V \rho s dV \quad (4-33)$$

El Segundo Principio establece una cota superior al incremento de entropía que sufrirá el sistema cuando se aplique una determinada potencia calorífica. En este sentido, una forma clara de formular el Segundo Principio se corresponde con la forma del Segundo Principio de Clausius-Duhem. Dicha forma establece que el calor aportado al sistema necesita un factor integrante que en este caso será la temperatura  $T$  (una descripción de esta formulación puede encontrarse en [10]). Además, permitirá discernir entre procesos reversibles e irreversibles. De este modo, la variación de la entropía total del sistema se define:

$$\dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T} \quad (4-34)$$

Aplicando la igualdad cuando se trata de un proceso reversible y utilizando la desigualdad cuando se trata de un proceso irreversible. Sustituyendo (4-17) y (4-33) en (4-34) se tendrá que:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho s dV \right) \geq \int_V \rho \left( \frac{\omega}{T} \right) dV - \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{q}}{T} \right) \cdot \vec{n} d\Omega \quad (4-35)$$

Utilizando el teorema de Gauss de nuevo en el segundo sumando del miembro derecho de (4-35) y desarrollando la divergencia se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho s dV \right) &\geq \int_V \rho \left( \frac{\omega}{T} \right) dV - \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\bar{q}}{T} \right) dV \\ &= \int_V \rho \left( \frac{\omega}{T} \right) dV - \int_V \frac{\nabla \cdot \bar{q}}{T} dV + \int_V \frac{\bar{q} \cdot \nabla T}{T^2} dV \end{aligned} \quad (4-36)$$

Como la relación integral (4-36) debe cumplirse para todo dominio de integración debe ser cierta también aplicada al integrando:

$$\rho \dot{s} - \rho \left( \frac{\omega}{T} \right) + \frac{\nabla \cdot \bar{q}}{T} - \frac{\bar{q} \cdot \nabla T}{T^2} \geq 0 \quad (4-37)$$

Sustituyendo en (4-37) la expresión del Primer Principio dada por (4-31) se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho \dot{s} + \left( \frac{\nabla \cdot \bar{q} - \rho \omega}{T} \right) - \frac{\bar{q} \cdot \nabla T}{T^2} &= \rho \dot{s} + \left( \frac{\sigma : D - \rho \dot{e}}{T} \right) - \frac{\bar{q} \cdot \nabla T}{T^2} \geq 0 \rightarrow \\ \rightarrow T \dot{s} + \left( \frac{\sigma : D}{\rho} \right) - \dot{e} - \frac{\bar{q} \cdot \nabla T}{T \rho} &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-38)$$

La expresión (4-38) describe que las disipaciones de energía en cualquier proceso deben ser siempre mayores o iguales que cero (nula en el caso de procesos reversibles y positivas en el caso de procesos irreversibles). Se hace útil además escribir el Segundo Principio en términos de la energía libre de Helmholtz  $F \left( \frac{J}{Kg} \right)$  que se define como la capacidad de desarrollar trabajo neto. Esta energía se utiliza en multitud de aplicaciones prácticas y tiene la ventaja de aislar la energía interna que realmente desarrollará potencia efectiva. Una descripción profunda sobre esta función de estado puede verse en [12]. La energía libre se define como una función de estado que será función del tensor de deformación en pequeñas deformaciones  $\varepsilon_{ij}$ , la temperatura  $T$  y un conjunto de variables internas  $\alpha_i$  (por ejemplo, en un modelo de daño continuo representarán los parámetros de daño que evolucionarán a la par que el resto de las variables independientes):

$$F(\varepsilon_{ij}, T, \alpha_i) = e - Ts \quad (4-39)$$

Derivando respecto del tiempo (4-39) se tiene que:

$$\dot{F} = \dot{e} - \dot{T}s - T\dot{s} \quad (4-40)$$

Sustituyendo (4-40) en (4-38), se obtiene para el Segundo Principio la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\sigma:D}{\rho}\right) - \dot{T}s - \dot{F} - \frac{\bar{q} \cdot \nabla T}{T\rho} \geq 0 \quad (4-41)$$

Pero, por otro lado, la derivación total respecto del tiempo del potencial  $F$  se puede escribir:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} D_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \quad (4-42)$$

Sustituyendo el desarrollo (4-42) en (4-41) y utilizando de nuevo la notación indicial se tiene que:

$$\left(\frac{\sigma_{ij} D_{ij}}{\rho}\right) - \dot{T}s - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} D_{ij} - \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T\rho} \left(q_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \geq 0 \quad (4-43)$$

Y reorganizando el Segundo Principio en su forma (4-43) podemos escribir:

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) D_{ij} - \rho \dot{T} \left(s + \frac{\partial F}{\partial T}\right) - \rho \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - \frac{1}{T} \left(q_i \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \geq 0 \quad (4-44)$$

Como se ha dicho, la expresión del Segundo Principio establece el sentido de la disipación de la energía en un proceso concreto. En este caso y según la forma (4-44) que se ha obtenido, lo único que podemos afirmar es que la suma de los términos de disipación mecánica más el término de disipación térmica deben ser iguales o mayores que cero. Sin embargo, en aquellos casos en los que se pueda desacoplar el problema térmico del problema mecánico será posible afirmar que dichas disipaciones deberán ser mayores o iguales a cero de forma separada. Es decir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) D_{ij} - \rho \dot{T} \left(s + \frac{\partial F}{\partial T}\right) - \rho \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \geq 0 & \rightarrow \text{Disipación mecánica} \\ \bar{q} \cdot \nabla T \leq 0 & \rightarrow \text{Disipación térmica} \end{array} \right\} \quad (4-45)$$

Este hecho puede establecerse bajo las consideraciones de la llamada teoría racional de Coleman y Noll y permiten obtener finalmente la forma del Segundo Principio de Clausius-Planck. Un desarrollo completo de estos aspectos puede encontrarse en [13], [14] o en [11]. Finalmente, observando que  $D_{ij}$ ,  $\dot{T}$  y  $\dot{\alpha}_i$  son las variables independientes del problema que se aborda la única forma de garantizar el cumplimiento de (4-45) es forzando que los multiplicadores de las variables independientes sean nulos. De esta manera, se obtiene:



$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \left( s + \frac{\partial F}{\partial T} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{\partial F}{\partial T} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ecuación constitutiva} \quad (4-46)$$

$$\left\{ \rho \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \leq 0 \right\} \rightarrow \text{Relación de disipación} \quad (4-47)$$

Finalmente, las consideraciones realizadas han permitido obtener (4-46) y (4-47) que constituyen la llamada ecuación constitutiva y la relación de disipación respectivamente. Estas relaciones son de carácter fundamental ya que aseguran el cumplimiento de la relación de disipación a la que obliga el Segundo Principio de la Termodinámica que se ha descrito. Las relaciones obtenidas proporcionan condiciones necesarias y suficientes para que las leyes de comportamiento sean termodinámicamente compatibles en el caso de la ecuación constitutiva (4-46) y una regla que debe verificar el régimen de disipación para las variables internas en el caso de (4-47). Un desarrollo completamente análogo al expuesto aquí puede encontrarse en [15].

A modo de resumir todos los aspectos esbozados en este apartado se harán las siguientes consideraciones. En primer lugar, se han enunciado el Primer y Segundo Principio de la Termodinámica formulándolos en función de las variables relevantes de nuestro problema y el potencial termodinámico  $F$ . En segundo lugar, se han postulado las siguientes restricciones de cara a elaborar una herramienta que implemente el Método de los Elementos Finitos:

- Se ha obtenido una relación dada por (4-28) que tiene un paralelismo completo con el Teorema de los Trabajos Virtuales obtenidos en (4-14). Esto garantiza el uso de dicho teorema sobre bases que verifican el cumplimiento del Primer Principio de la Termodinámica y, por tanto, de un balance energético físicamente válido.
- Se han obtenido un par de relaciones, dadas por (4-46) y (4-47), que constituyen relaciones necesarias. La utilización de leyes de comportamiento que cumplan con estas relaciones garantiza el cumplimiento del Segundo Principio y, por tanto, podremos asegurar la existencia de una cota superior para la energía disipada en términos del aumento de entropía del sólido.

## Planteamiento general para obtener una forma del Método de los Elementos Finitos

Para obtener una forma operativa del Método de los Elementos Finitos se debe especificar la forma que cada uno de los elementos que aparecen en (4-14) va a adoptar. A partir de ahora,

se adoptará la notación de Voigt para tensores simétricos que permite hacer un tratamiento que incluya las seis componentes relevantes de tensión y deformación<sup>3</sup>. Es decir:

$$\begin{aligned}\sigma^T &= [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_{yz} \sigma_{xz} \sigma_{xy}] \\ \varepsilon^T &= [\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{yz} \gamma_{xz} \gamma_{xy}]\end{aligned}\quad (4-48)$$

Adicionalmente también se tomará:

$$\begin{aligned}\delta^T &= [u^\delta v^\delta w^\delta] \\ X^T &= [X_x X_y X_z]\end{aligned}\quad (4-49)$$

En esta notación, los elementos que aparecen en (4-14), se escriben:

$$\begin{aligned}\sigma : \varepsilon^\delta &= \varepsilon^{\delta T} \sigma \\ \vec{X} \cdot \vec{\delta} &= \delta^T X \\ \vec{t}_c \cdot \vec{\delta} &= \delta^T t_c \\ \vec{a} \cdot \vec{\delta} &= \delta^T a\end{aligned}\quad (4-50)$$

Para obtener el Método de los Elementos Finitos, es preciso elegir una ley de comportamiento concreta. Se asumirá una ley constitutiva según (4-46), es decir, de la forma  $\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$  para un material viscoelástico-plástico:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \xi_{ijkl} D_{kl} \quad (4-51)$$

Donde  $C_{ijkl}$  y  $\xi_{ijkl}$  son tensores de cuarto orden que permiten representar un comportamiento visco-elástico para el material que se esté estudiando<sup>4</sup> y en donde  $\varepsilon_{kl}$  representa el tensor de deformaciones definido en (4-5) y (4-6) y en donde  $D_{kl}$  representa el tensor velocidad de deformación (4-25). Sustituyendo todos estos elementos en (4-14) se tiene:

$$\int_V \delta^T X dV + \int_\Omega \delta^T t_c d\Omega = \int_V \varepsilon^{\delta T} \sigma dV + \int_V \rho \delta^T a dV \quad (4-52)$$

La relación (4-52) constituye una expresión del Teorema de los Trabajos Virtuales que relaciona un conjunto de fuerzas y tensiones  $t_c$ ,  $X$  y  $\sigma$  que están equilibradas y un campo de

<sup>3</sup> Al tratarse de tensores simétricos los tensores de tensión y deformación sólo tienen seis componentes relevantes.

<sup>4</sup> En general estos tensores presentarán una dependencia con las magnitudes independientes, es decir  $C_{ijkl}(\varepsilon_{kl})$  y  $\xi_{ijkl}(D_{kl})$ . Esta dependencia permite recoger la no linealidad en el comportamiento de un material específico.

desplazamiento virtual  $\delta$  compatible<sup>5</sup> con las condiciones de contorno y con las deformaciones  $\varepsilon^\delta$ .

En (4-52), la única incógnita es, por tanto, el campo de desplazamiento real  $u(x, y, z)$  definido en el sólido. Derivando éste se calcula el campo de deformaciones  $\varepsilon(x, y, z)$  y a partir de éste se obtienen las tensiones según la ley de comportamiento (4-51). Es importante remarcar que  $\delta^T$  es un campo virtual que se impone que debe ser compatible con las condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno determinarán qué componentes de  $t_c$  pueden ser reacciones (y, por tanto, incógnitas) y qué componentes serán datos. Complementariamente, algunos desplazamientos serán impuestos (y, por tanto, conocidos) y otros se tendrán que determinar de forma que el sistema siga siendo compatible y determinado. Este aspecto se abordará más adelante.

En el Método de los Elementos Finitos, que es un método aproximado, se trata de obtener una solución para el campo de desplazamientos partiendo de alguna forma funcional para dichos campos. Una exposición pormenorizada de dichas formas funcionales y que será la que se utilice en este desarrollo se puede encontrar en [16]. De este modo, el método parte de expresar el campo de desplazamientos, velocidades y aceleraciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^N u_i \theta_i(x, y, z) & \dot{u} &= \sum_{i=1}^N \dot{u}_i \theta_i(x, y, z) & \ddot{u} &= \sum_{i=1}^N \ddot{u}_i \theta_i(x, y, z) \\ v &= \sum_{i=1}^N v_i \theta_i(x, y, z) & \dot{v} &= \sum_{i=1}^N \dot{v}_i \theta_i(x, y, z) & \ddot{v} &= \sum_{i=1}^N \ddot{v}_i \theta_i(x, y, z) \\ w &= \sum_{i=1}^N w_i \theta_i(x, y, z) & \dot{w} &= \sum_{i=1}^N \dot{w}_i \theta_i(x, y, z) & \ddot{w} &= \sum_{i=1}^N \ddot{w}_i \theta_i(x, y, z) \end{aligned} \quad (4-53)$$

Donde los valores  $u_i$ ,  $v_i$  y  $w_i$  (y sus correspondientes para las velocidades y aceleraciones) son coeficientes. Como puede verse, se han utilizado la misma cantidad  $N$  de funciones aproximantes y la misma forma funcional  $\theta_i$  para todas ellas. Esta elección no es obligada, no obstante, es la opción más utilizada.

En notación matricial, se puede escribir:

---

<sup>5</sup> Debido a que según (4-4) y (4-5), las deformaciones se obtienen por derivación a través de los desplazamientos.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &= \theta c = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & | & \theta_2 & 0 & 0 & | & \dots & \theta_N & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 & | & 0 & \theta_2 & 0 & | & \dots & 0 & \theta_N & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & | & 0 & 0 & \theta_2 & | & \dots & 0 & 0 & \theta_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ - \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ - \\ u_N \\ v_N \\ w_N \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} &= \theta \dot{c} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & | & \theta_2 & 0 & 0 & | & \dots & \theta_N & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 & | & 0 & \theta_2 & 0 & | & \dots & 0 & \theta_N & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & | & 0 & 0 & \theta_2 & | & \dots & 0 & 0 & \theta_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{w}_1 \\ - \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{w}_2 \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ - \\ \dot{u}_N \\ \dot{v}_N \\ \dot{w}_N \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{pmatrix} &= \theta \ddot{c} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & | & \theta_2 & 0 & 0 & | & \dots & \theta_N & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 & | & 0 & \theta_2 & 0 & | & \dots & 0 & \theta_N & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & | & 0 & 0 & \theta_2 & | & \dots & 0 & 0 & \theta_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{w}_1 \\ - \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{w}_2 \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ - \\ \ddot{u}_N \\ \ddot{v}_N \\ \ddot{w}_N \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-54}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 c &= \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ - \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ - \\ u_N \\ v_N \\ w_N \end{pmatrix} \\
 \dot{c} &= \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{w}_1 \\ - \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{w}_2 \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ - \\ \dot{u}_N \\ \dot{v}_N \\ \dot{w}_N \end{pmatrix} \\
 \ddot{c} &= \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{w}_1 \\ - \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{w}_2 \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ - \\ \ddot{u}_N \\ \ddot{v}_N \\ \ddot{w}_N \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-55}$$

Adicionalmente, dado que los desplazamientos virtuales son arbitrarios, se podrá hacer las mismas consideraciones que para los desplazamientos, velocidades y aceleraciones reales y escribir:

$$\delta = \begin{pmatrix} u^\delta \\ v^\delta \\ w^\delta \end{pmatrix} = \Delta b = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & | & \delta_2 & 0 & 0 & | & \dots & \delta_N & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & | & 0 & \delta_2 & 0 & | & \dots & 0 & \delta_N & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & | & 0 & 0 & \delta_2 & | & \dots & 0 & 0 & \delta_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^\delta \\ v_1^\delta \\ w_1^\delta \\ - \\ u_2^\delta \\ v_2^\delta \\ w_2^\delta \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ - \\ u_N^\delta \\ v_N^\delta \\ w_N^\delta \end{pmatrix} \quad (4-56)$$

Donde:

$$b = \begin{pmatrix} u_1^\delta \\ v_1^\delta \\ w_1^\delta \\ - \\ u_2^\delta \\ v_2^\delta \\ w_2^\delta \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ - \\ u_N^\delta \\ v_N^\delta \\ w_N^\delta \end{pmatrix} \quad (4-57)$$

En régimen de pequeñas deformaciones<sup>6</sup>, las relaciones de compatibilidad dadas en (4-4) y (4-5), se pueden poner en forma matricial:

<sup>6</sup> En ausencia de pequeñas deformaciones, las relaciones entre  $\varepsilon$  y  $u$  se establecerían a través de un operador no lineal distinto del mostrado en (4-59).

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = Bu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4-58)$$

Donde se ha definido:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad (4-59)$$

Adoptando la misma forma para las deformaciones virtuales:

$$\varepsilon^\delta = B\delta \quad (4-60)$$

Sustituyendo las relaciones de (4-53) a (4-60) en (4-52), se tiene que:

$$\int_V b^T \Delta^T X dV + \int_\Omega b^T \Delta^T t_c d\Omega = \int_V b^T \Delta^T B^T \sigma dV + \int_V \rho b^T \Delta^T \theta \ddot{c} dV \quad (4-61)$$

Sacando factor común  $b^T$ , se puede escribir:

$$b^T \int_V \Delta^T X dV + b^T \int_\Omega \Delta^T t_c d\Omega - b^T \int_V \Delta^T B^T \sigma dV - b^T \int_V \rho \Delta^T \theta \ddot{c} dV = 0 \quad (4-62)$$

A su vez, este sistema se puede reescribir:

$$b^T \left[ \int_V \Delta^T X dV + \int_{\Omega} \Delta^T t_c d\Omega - \int_V \Delta^T B^T \sigma dV - \int_V \rho \Delta^T \theta \ddot{c} dV \right] = 0 \quad (4-63)$$

Es importante notar que, hasta el momento, la única hipótesis que se ha asumido es la de considerar pequeños desplazamientos en las relaciones de compatibilidad entre los desplazamientos y las deformaciones, dadas en (4-58). Para obtener una forma operativa del Método de los Elementos Finitos es necesario, en primer lugar, considerar la aproximación para los desplazamientos que se hizo en (4-54).

En segundo lugar, hay que efectuar la elección de las funciones  $\delta_i$  que se definieron en (4-56). La necesidad de minimizar la cantidad de funciones a manejar hace bastante aconsejable utilizar las mismas funciones aproximantes para los campos de desplazamientos reales y los virtuales:

$$\Delta = \theta \quad (4-64)$$

Sustituyendo (4-64) en (4-63) se tiene que:

$$b^T \left[ \int_V \theta^T X dV + \int_{\Omega} \theta^T t_c d\Omega - \int_V \theta^T B^T \sigma dV - \int_V \rho \theta^T \theta \ddot{c} dV \right] = 0 \quad (4-65)$$

Teniendo en cuenta que los desplazamientos virtuales (y, por tanto, los coeficientes) son arbitrarios y que la expresión (4-65) debe ser válida para cualquier campo de desplazamientos virtual, se deberá tener:

$$\int_V \theta^T X dV + \int_{\Omega} \theta^T t_c d\Omega = \int_V \theta^T B^T \sigma dV + \int_V \rho \theta^T \theta \ddot{c} dV \quad (4-66)$$

(3Nx3)x(3x1) + (3Nx3)x(3x1) = (3Nx3)x(3x6)x(6x1) + (3Nx3)x(3x3N)x(3Nx1)

Mediante la observación de las dimensiones<sup>7</sup> de las matrices se puede ver que (4-66) representa un sistema de  $6N$  incógnitas con  $3N$  ecuaciones. Las incógnitas son los  $3N$  coeficientes del vector  $c$  y los  $3N$  coeficientes del vector  $\ddot{c}$ . El sistema (4-66) se puede escribir de una manera compacta:

$$F^{ext} = F^{int} + F^{mas} \quad (4-67)$$

Donde:

<sup>7</sup> Se han incluido entre paréntesis debajo de (4-66).



$$\begin{aligned}
F^{ext} &= \int_V \theta^T X dV + \int_{\Omega} \theta^T t_c d\Omega \\
F^{int} &= \int_V \theta^T B^T \sigma dV \\
F^{mas} &= \int_V \rho \theta^T \theta \ddot{c} dV
\end{aligned} \tag{4-68}$$

Conviene antes de seguir, prestar atención a la dimensionalidad de los elementos que aparecen en (4-68). En este sentido, y adoptando una notación tensorial, se puede escribir para dichos elementos:

$$\begin{aligned}
F^{ext}_i &= \int_V \theta^T_{ij} X_j dV + \int_{\Omega} \theta^T_{ij} t_{cj} d\Omega = \int_V X_j \theta_{ji} dV + \int_{\Omega} t_{cj} \theta_{ji} d\Omega \\
F^{int}_i &= \int_V \theta^T_{ij} B^T_{jk} \sigma_k dV = \int_V \sigma_k B_{kj} \theta_{ji} dV \\
F^{mas}_i &= \int_V \rho \theta^T_{ij} \theta_{js} \ddot{c}_s dV = \int_V \rho \theta_{ji} \theta_{js} \ddot{c}_s dV = \left[ \int_V \rho \theta_{ji} \theta_{js} dV \right] \ddot{c}_s = M_{is} \ddot{c}_s
\end{aligned} \tag{4-69}$$

Donde los subíndices tienen recorridos específicos. Para  $i, s = 1, \dots, 3N$ , para  $j = 1, \dots, 3$  y para  $k = 1, \dots, 6$ . Estas asimilaciones permiten definir los vectores  $F^{ext}_i$ ,  $F^{int}_i$  y  $F^{mas}_i$  que tienen  $3N$  componentes y cuya dimensionalidad ha venido definida por el número de funciones aproximantes que se han asumido en (4-53).

Respectivamente estos vectores vienen generados por las fuerzas externas aplicadas al sistema, las acciones que en el interior del sólido llevan a cabo las tensiones interiores generadas por las fuerzas externas y finalmente las fuerzas másicas que modelan las acciones de inercia propias de un problema dinámico. Las fuerzas másicas así definidas se generan a partir de un tensor  $M_{is}$  de segundo orden que se denomina *matriz de masa*.

Complementariamente para especificar los vectores de fuerzas expuestos en (4-67) y (4-68), se hace necesario elegir y especificar las funciones de aproximación. Dichas funciones  $\theta_i$  tienen que ser al menos lineales para garantizar que se tienen valores no nulos para las deformaciones. Esto es debido a que las deformaciones se obtienen por derivación a partir de los desplazamientos según (4-58).

Se elegirán funciones de soporte reducido para las funciones  $\theta_i$  de manera que sólo estén definidas en zonas acotadas y se anulen fuera de ellas. Aunque se pedirá continuidad para las funciones que se plantearán, ésta no tiene por qué ser requerida, siempre que en un planteamiento al límite dicha propiedad quede garantizada.

Evidentemente si admitimos funciones de aproximación discontinuas para construir el campo de desplazamientos, tendremos por derivación un campo de deformaciones con valores infinitos. Sin embargo, si progresivamente se van utilizando mallas con un número mayor de nodos y la continuidad en las deformaciones se recupera, la solución proporcionada por el Método de los Elementos Finitos tenderá a la solución correcta.

Un criterio que permite asegurar la continuidad en el límite de estas funciones viene dado por el denominado *test de la parcela*. Aunque en este trabajo se utilizarán funciones de aproximación continuas y, por tanto, no serán necesarias estas disquisiciones, una descripción de este test puede encontrarse en [17].

Siempre que sobre el sólido se defina una malla distribuida a lo largo de su geometría, los dominios de las funciones de forma quedarán establecidos de manera que cubrirán completamente el sólido bajo estudio. La malla quedará definida a partir de unos puntos denominados *nodos* cuyas posiciones corresponderán con puntos materiales del sólido. Aquellos nodos que sean contiguos se utilizarán para definir una serie de *elementos finitos* que armados convenientemente definirán la malla. Estos elementos permiten discretizar el sólido continuo bajo estudio y motivan el nombre que se le da al método que se está describiendo.

Esta malla que puede estar definida por un número mayor o menor de nodos (y, por tanto, de elementos) y que en el límite tenderá al sólido que se analiza de forma exacta, permitirá definir los dominios de definición en donde las funciones de aproximación  $\theta_i$  formuladas a trozos tendrán valores no nulos.

Por otro lado, habrá asociada una función aproximante  $\theta_i$  a cada nodo de la malla. Esta función tomará un valor unidad en dicho nodo y cero en el resto. Dado que la distribución de nodos a lo largo del dominio puede establecerse según el esquema que se quiera, la malla podrá adaptarse permitiendo la presencia de un número mayor de elementos en aquellas zonas donde se prevean variaciones más grandes de las variables de interés. Consecuentemente, en aquellas zonas donde se quiera una resolución menor en los resultados podrá disminuirse la cantidad de elementos.

Siguiendo este esquema, el significado de los coeficientes  $c_i$ ,  $\dot{c}_i$  y  $\ddot{c}_i$  es claro. Debido a que la función aproximante  $\theta_i$  vale la unidad en el nodo  $i$  que tiene asociada (y cero en los demás), los coeficientes asociados a ese nodo representarán los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de dicho nodo. En este sentido, el número  $N$  de funciones que se tomaron en (4-53) coincidirá con el número de nodos de la malla que se elija.

Para hacer una interpretación más profunda y especificar aún más la forma de las funciones aproximantes, fijaremos ideas mediante el uso de una ley de comportamiento de la forma (4-51). En dicha ley,  $C_{ijkl}$  y  $\xi_{ijkl}$  son tensores de cuarto orden definidos por 81 constantes que finalmente se pueden reducir a 36 (teniendo en cuenta la simetría de los tensores de tensión y deformación). De momento, se supondrá que estos tensores no dependen de las variables independientes, estándose, por tanto, ante un problema lineal. Adoptando la notación de Voigt, la ley de comportamiento adopta la forma:

$$\begin{aligned}
\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{14} & \xi_{15} & \xi_{16} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & \xi_{24} & \xi_{25} & \xi_{26} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & \xi_{34} & \xi_{35} & \xi_{36} \\ \xi_{41} & \xi_{42} & \xi_{43} & \xi_{44} & \xi_{45} & \xi_{46} \\ \xi_{51} & \xi_{52} & \xi_{53} & \xi_{54} & \xi_{55} & \xi_{56} \\ \xi_{61} & \xi_{62} & \xi_{63} & \xi_{64} & \xi_{65} & \xi_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \\ 2D_{yz} \\ 2D_{xz} \\ 2D_{xy} \end{pmatrix} = C\varepsilon + \xi I_2 D \\
&= CB\theta c + \xi B\theta \dot{c}
\end{aligned} \tag{4-70}$$

En la expresión (4-70) se han utilizado las formas (4-54) para los campos de desplazamientos y velocidades y el operador  $B$  definido en (4-59). Además, para obtener el tensor velocidad de deformación utilizando el mismo operador  $B$  se ha considerado el factor dos en las componentes  $D_{yz}$ ,  $D_{xz}$  y  $D_{xy}$  en (4-70). De esta manera<sup>8</sup>:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \\ 2D_{yz} \\ 2D_{xz} \\ 2D_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \\ D_{yz} \\ D_{xz} \\ D_{xy} \end{pmatrix} = I_2 D = B\theta \dot{c} \tag{4-71}$$

Si se sustituye esta ley de comportamiento en la segunda de (4-68):

$$F^{int} = \int_V \theta^T B^T \sigma dV = \int_V \theta^T B^T C B \theta c dV + \int_V \theta^T B^T \xi B \theta \dot{c} dV \tag{4-72}$$

Que en notación tensorial se puede reescribir:

---

<sup>8</sup>Dado que el tensor velocidad de deformación se define según (4-25) como  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ , para poner la ley de comportamiento (4-70) según la notación de Voigt se ha definido la matriz  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ;

Habitualmente se suele redefinir la matriz de viscosidad  $\xi$  para tener en cuenta las constantes apropiadas. A partir de aquí, se considerará que el tensor de viscosidad incluye dichas constantes. La expresión tensorial de la notación de Voigt se escribe  $\sigma_k = C_{kh}\varepsilon_h + \xi_{kh}D_h = C_{kh}B_{hv}\theta_{vs}c_s + \xi_{kh}B_{hv}\theta_{vr}\dot{c}_r$  donde ya se considera un  $\xi_{kh}$  que ya tiene en cuenta los factores 2 apropiados.

$$\begin{aligned}
 F^{int}_i &= \int_V \theta^T_{ij} B^T_{jk} C_{kh} B_{hv} \theta_{vs} c_s dV + \int_V \theta^T_{ij} B^T_{jk} \xi_{kh} B_{hv} \theta_{vr} \dot{c}_r dV \\
 &= \int_V \theta_{ji} B_{kj} C_{kh} B_{hv} \theta_{vs} c_s dV + \int_V \theta_{ji} B_{kj} \xi_{kh} B_{hv} \theta_{vr} \dot{c}_r dV \\
 &= \left[ \int_V \theta_{ji} B_{kj} C_{kh} B_{hv} \theta_{vs} dV \right] c_s + \left[ \int_V \theta_{ji} B_{kj} \xi_{kh} B_{hv} \theta_{vr} dV \right] \dot{c}_r \\
 &= K_{is} \cdot c_s + \Xi_{ir} \cdot \dot{c}_r = Kc + \Xi \dot{c}
 \end{aligned} \tag{4-73}$$

Donde se ha usado que  $\theta^T_{ij} = \theta_{ji}$  y  $B^T_{jk} = B_{kj}$  y se ha definido:

$$\begin{aligned}
 K &= \int_V \theta^T B^T C B \theta dV = \int_V \theta_{ji} B_{kj} C_{kh} B_{hv} \theta_{vs} dV = K_{is} \\
 \Xi &= \int_V \theta^T B^T \xi B \theta dV = \int_V \theta_{ji} B_{kj} \xi_{kh} B_{hv} \theta_{vr} dV = \Xi_{ir}
 \end{aligned} \tag{4-74}$$

Así, sustituyendo (4-74) en (4-69) y ésta a su vez en (4-67) se obtendrá finalmente que:

$$F^{ext} = Kc + \Xi \dot{c} + M\ddot{c} \tag{4-75}$$

Por todo lo anterior, se pueden asociar los vectores  $c$ ,  $\dot{c}$  y  $\ddot{c}$  en (4-75) con las componentes de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en cada uno de los nodos e identificar la matriz  $K$  con una matriz de rigidez, la matriz  $\Xi$  con una matriz de amortiguamiento y  $M$  con una matriz de masa que gobierne los balances de inercia. Así, cada una de las componentes de las matrices tendrá un claro significado físico. Por ejemplo, cualquier elemento  $K^{ij}$  corresponderá a la acción que se tiene en el nodo  $i$  cuando sólo se produce un desplazamiento unidad en el nodo  $j$  (y cero en los restantes).

Por otro lado, será nulo cualquier elemento de la matriz de rigidez que interrelacione  $\theta_i$  con soportes asociados sin ninguna zona en común. Así, por ejemplo, un elemento genérico de la matriz de rigidez, dada su definición a partir de (4-74)<sup>9</sup> se escribirá:

$$K^{ij} = \int_V \begin{pmatrix} \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & \theta_i \end{pmatrix} B^T C B \begin{pmatrix} \theta_j & 0 & 0 \\ 0 & \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & \theta_j \end{pmatrix} dV \tag{4-76}$$

Tal y como se han definido, los soportes espaciales que conforman el dominio de cada una de las funciones de aproximación no están elegidos de manera que en un punto del sólido haya definida sólo una función de aproximación. De este modo, dichos soportes, en general, se

---

<sup>9</sup>El elemento  $K^{ij}$  explicitado en (4-76) hace referencia al elemento 'ij' (que es, a su vez, una matriz 3x3 propia de un problema tridimensional) de la matriz por bloques  $K$  según una notación matricial. Siendo, en este sentido, los índices  $i$  y  $j$  diferentes a los utilizados en el segundo y tercer miembro de la primera expresión en (4-74) correspondiente a una notación tensorial.

solaparán y cada uno de ellos contendrá varios elementos finitos (todos aquellos que confluyan en el nodo correspondiente).

Por este motivo, definiendo otra serie de funciones de pequeño soporte  $N$  definidas sobre cada uno de los elementos que confluyen en un nudo y que se anulen fuera de ellos, se puede escribir cada función  $\theta_i$  como una suma de funciones  $N$  (sólo las que están definidas en los elementos que confluyen en el nodo  $i$ ). Estas funciones que tienen carácter local circunscrito a su elemento finito correspondiente reciben el nombre de *funciones de forma*. Evidentemente cada elemento finito tendrá asociado tantas funciones de forma como nodos lo conformen. Matemáticamente la relación entre las funciones aproximantes y las funciones de forma se puede escribir<sup>10</sup>:

$$\theta_i(x, y, z) = \sum_{e=1}^P N_i^e(x, y, z) \quad (4-77)$$

Para ilustrar lo anterior, se considera un dominio plano que se discretiza según una malla de nueve nodos y los elementos  $A, B, C$  y  $D$ :

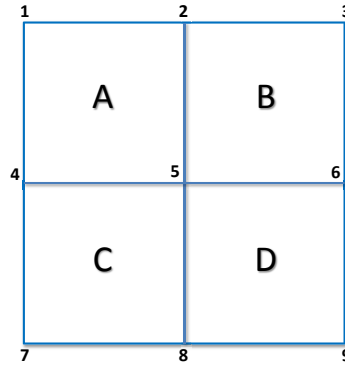


Figura 4.1. Mallado del dominio de interés

El elemento  $K^{24}$  de la matriz de rigidez  $K$ , según (4-76), del dominio representado en la Figura 4.1, se puede escribir:

$$K^{24} = \int_V \begin{pmatrix} \theta_2 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix} B^T C B \begin{pmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_4 \end{pmatrix} dV \quad (4-78)$$

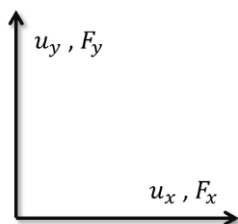
<sup>10</sup> $N_i^e(x, y, z)$  hace referencia a la función de forma del elemento  $e$  correspondiente a su nodo  $i$ . Estas funciones se anularán fuera del elemento  $e$ . Dentro del elemento, en el nodo  $i$ , tendrán valor uno mientras que se anularán en el resto de los nodos que conforman el elemento.  $P$  hace referencia al número total de elementos que confluyen en el nodo  $i$ .

Teniendo en cuenta que los elementos que confluyen en el nodo 2 son los elementos  $A$  y  $B$  y en el nodo 4, los elementos  $A$  y  $C$ , se puede utilizando las funciones  $N_i^e$ , escribir el elemento  $K^{24}$  dado en (4-78):

$$\begin{aligned}
 K_{24} &= \int_V \begin{pmatrix} N_2^A + N_2^B & 0 \\ 0 & N_2^A + N_2^B \end{pmatrix} B^T C B \begin{pmatrix} N_4^A + N_4^C & 0 \\ 0 & N_4^A + N_4^C \end{pmatrix} dV \\
 &= \int_V \begin{pmatrix} N_2^A & 0 \\ 0 & N_2^A \end{pmatrix} B^T C B \begin{pmatrix} N_4^A & 0 \\ 0 & N_4^A \end{pmatrix} dV + \\
 &\int_V \begin{pmatrix} N_2^A & 0 \\ 0 & N_2^A \end{pmatrix} B^T C B \begin{pmatrix} N_4^C & 0 \\ 0 & N_4^C \end{pmatrix} dV + \int_V \begin{pmatrix} N_2^B & 0 \\ 0 & N_2^B \end{pmatrix} B^T C B \begin{pmatrix} N_4^A & 0 \\ 0 & N_4^A \end{pmatrix} dV \\
 &\quad + \int_V \begin{pmatrix} N_2^B & 0 \\ 0 & N_2^B \end{pmatrix} B^T C B \begin{pmatrix} N_4^C & 0 \\ 0 & N_4^C \end{pmatrix} dV = K_A^{24}
 \end{aligned} \tag{4-79}$$

Donde el segundo, tercer y cuarto sumando son nulos debido a que los dominios de definición de las funciones de forma que aparecen en los sumandos no son coincidentes, siendo solamente el elemento  $A$  el único elemento que transmite rigidez entre los nodos 2 y 4. En cuanto a otras componentes, como la  $K^{29}$ , serán nulas ya que, de nuevo, relacionan funciones de aproximación que tienen dominios de definición sin zonas comunes.

Esta estructuración permite hacer una lectura en términos de fuerzas y desplazamientos elementales equivalente a la de todo el sólido. De esta manera, en cada nodo habrá definido un vector global de fuerza externa y otro vector global de desplazamiento:



**Figura 4.2. Variables globales. Desplazamientos y fuerzas en el nodo**

De la misma manera, cada nodo del elemento  $A$  de la Figura 4.1 tendrá asociado vectores de desplazamientos y fuerza en el elemento:

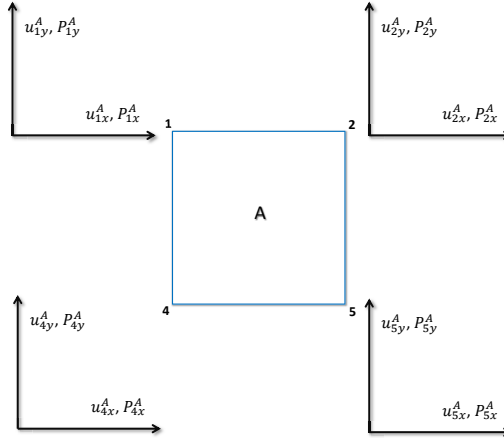


Figura 4.3. Variables elementales

Las variables elementales y nodales deberán verificar condiciones de equilibrio y compatibilidad apropiadas. Si se toma como ejemplo el segundo nodo, estas relaciones se escriben:

$$\begin{aligned} F_{2x} &= P_{2x}^A + P_{2x}^B \\ F_{2y} &= P_{2y}^A + P_{2y}^B \\ u_{2x} &= u_{2x}^A = u_{2x}^B \\ u_{2y} &= u_{2y}^A = u_{2y}^B \end{aligned} \quad (4-80)$$

De la misma manera, cada elemento llevará asociada una relación del tipo (4-75):

$$\begin{aligned} P_{elemental}^{local} &= \left[ \int_V (BN)_e^T C_e (BN)_e dV \right] c_{local} + \left[ \int_V (BN)_e^T \xi_e (BN)_e dV \right] \dot{c}_{local} \\ &+ \left[ \int_V \rho (N)_e^T (N)_e dV \right] \ddot{c}_{local} \end{aligned} \quad (4-81)$$

Los elementos  $P_{elemental}^{local}$ ,  $C_e$ ,  $\xi_e$ ,  $(BN)_e$  y  $c_{local}$ ,  $\dot{c}_{local}$  y  $\ddot{c}_{local}$  se refieren sólo a los nodos del elemento finito que se está evaluando en (4-81). Dichos nodos no estarán, en general, organizados según la numeración global de (4-75).

La numeración local de cada elemento se puede obtener a partir de la numeración global a través de matrices de ensamblaje  $E_{ij}^e$  para cada elemento  $e$ . A modo de ejemplo, se muestra a continuación para el elemento  $B$ , la forma de la matriz de ensamblaje que tiene asociada:

$$c_{local} = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_3 \\ u_2 \end{pmatrix} = E^B c = \begin{pmatrix} 000010000 \\ 000001000 \\ 001000000 \\ 010000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} \quad (4-82)$$

Las matrices totales de rigidez, masa y amortiguamiento se pueden expresar, utilizando las matrices de ensamblaje, a partir de la suma de sus matrices análogas elementales. Aprovechando este hecho, (4-75) se puede escribir:

$$\begin{aligned} F_{ext} &= Kc + \Xi \dot{c} + M\ddot{c} \\ &= \left[ \sum_{e=1}^E \left( E^{eT} \left( \int_V N^e B_e^T C_e B_e N^e dV \right) E^e \right) \right] c \\ &\quad + \left[ \sum_{e=1}^E \left( E^{eT} \left( \int_V N^e B_e^T \xi_e B_e N^e dV \right) E^e \right) \right] \dot{c} \\ &\quad + \left[ \sum_{e=1}^E \left( E^{eT} \left( \int_V \rho N^e N^e dV \right) E^e \right) \right] \ddot{c} \end{aligned} \quad (4-83)$$

Donde  $E$  representa el número de elementos en los que se divide el dominio completo. En (4-83) se pueden definir también matrices de rigidez  $k^e$ , de amortiguamiento  $\zeta^e$  y masa  $m^e$  para cada elemento  $e$  de la forma:

$$\begin{aligned} k^e &= \int_V N^e B_e^T C_e B_e N^e dV \\ \zeta^e &= \int_V N^e B_e^T \xi_e B_e N^e dV \\ m^e &= \int_V \rho N^e N^e dV \end{aligned} \quad (4-84)$$

Es interesante volver a recalcar que las únicas consideraciones particulares realizadas hasta el momento han sido el comportamiento lineal del material y pequeñas deformaciones. Salvo por estos aspectos, el esquema que se propone es general y puede ser aplicado a cualquier problema que haya sido discretizado convenientemente.

A partir de  $c$ ,  $\dot{c}$  y  $\ddot{c}$ , utilizando (4-54), se obtienen los desplazamientos, velocidades y aceleraciones. Sustituyendo los desplazamientos en las ecuaciones (4-58), se tienen las deformaciones mientras que sustituyendo el campo de velocidades en (4-71), se tiene el tensor velocidad de deformación. A su vez, las deformaciones, a través de la ley de comportamiento (4-70), junto con el tensor velocidad de deformación proporcionará el campo de tensiones del sólido.



La expresión dada por (4-83) representa un sistema de  $3N$  ecuaciones con  $3N$  incógnitas que son las  $3N$  componentes del vector  $c$ , otras  $3N$  incógnitas que son las componentes del vector  $\dot{c}$  y otras  $3N$  incógnitas que son los coeficientes  $\ddot{c}$ . Para hacer determinado el sistema se necesita alguna fórmula que nos permita poner las componentes del vector velocidad y el vector aceleración en función de los desplazamientos nodales. Para ello es necesaria alguna estrategia que permita, mediante un esquema de diferencias finitas, escribir la velocidad y aceleración en función de los desplazamientos definidos en los nodos de la misma malla que se haya establecido. Por tanto, habrá que conjugar el planteamiento de discretización espacial asumido por el Método de los Elementos Finitos con un planteamiento de discretización temporal que proporcione fórmulas que expresen la aceleración y velocidad nodales en función de los desplazamientos nodales.

En general, las condiciones de contorno se proporcionan o bien en forma de fuerzas exteriores  $F_{ext}$  sobre el contorno  $\Omega$  o bien en forma de desplazamientos impuestos o bien según esquemas mixtos. La naturaleza de dichas condiciones debe ser tal que si en un nodo hay un desplazamiento impuesto (que impone valores a determinadas componentes del vector  $c$  correspondientes a ese nodo), la fuerza sobre el mismo (que será de reacción) será desconocida. De este modo, el sistema continuará estando determinado.

Para poder despejar el sistema es necesario escribirlo por bloques. Para aclarar este aspecto, se propone un problema estático lineal elástico de forma que las matrices de amortiguamiento y masa sean nulas. A modo de ejemplo, se considera de nuevo el caso de la Figura 4.1. Se supondrá que los desplazamientos nodales 1, 2 y 3 se imponen (por lo que las fuerzas asociadas a dichos nodos serán desconocidas) y se almacenan en un vector  $c_d$ . Adicionalmente, las acciones desconocidas, serán almacenadas en  $F_d$ . Asimismo, los desplazamientos desconocidos restantes irán en un vector  $c_n$  y las fuerzas conocidas restantes en un vector  $F_n$ . Escribiendo (4-83) por bloques, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} F_d \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{dd} & K_{dn} \\ K_{nd} & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_d \\ c_n \end{pmatrix} \quad (4-85)$$

De la segunda de las dos ecuaciones:

$$c_n = K_{nn}^{-1}(F_n - K_{nd}c_d) \quad (4-86)$$

De esta manera  $c_n$ , queda escrito en términos de magnitudes conocidas. Asimismo, de la primera expresión de las (4-85):

$$F_d = K_{dd}c_d + K_{dn}c_n \quad (4-87)$$

Sustituyendo  $c_n$  de (4-86) en (4-87), se obtiene para el vector  $F_d$  desconocido:

$$F_d = K_{dd}c_d + K_{dn}(K_{nn}^{-1}(F_n - K_{nd}c_d)) \quad (4-88)$$

O bien que:

$$F_d = K_{dn}K_{nn}^{-1}F_n + (K_{dd} - K_{dn}K_{nn}^{-1}K_{nd})c_d \quad (4-89)$$

Así, utilizando (4-86) y (4-89), se calcularán  $c_n$  y  $F_d$  respectivamente, en función de cantidades conocidas.

### 4.3. Problemas no lineales. El Método de Newton-Raphson

Hasta este punto, se ha construido una expresión del método de elementos finitos que proporciona una forma de resolución numérica para problemas tensionales; constituidos por un dominio sólido continuo sometido a un sistema de cargas y unas condiciones de contorno determinadas que, además, son generales salvo por dos consideraciones. Dichas consideraciones son el uso de pequeños desplazamientos y la linealidad en la ley de comportamiento.

La primera de ellas se mantendrá hasta el final, ya que los niveles de deformación que se alcanzarán en las tipologías de interés cuando se produce la rotura, son suficientemente pequeños para que esta hipótesis siga siendo válida. Sin embargo, la consideración exclusiva de leyes de comportamiento que sean lineales no permitiría la inclusión de modelos de daño o plasticidad que implicasen no linealidad en los modelos propuestos. Por este motivo, en este apartado, se expondrán los cambios pertinentes que habría que introducir en el desarrollo que se ha hecho para poder abordar la resolución de problemas no lineales.

En este sentido, conviene notar que es precisamente la linealidad que se ha supuesto para la ley de comportamiento en el apartado anterior, la que ha permitido discretizar el dominio según las funciones de forma definidas en (4-77). Estas funciones de forma son las que hacen posible, tras un proceso de ensamblaje utilizando las relaciones elementales (4-81), que se genere el sistema de ecuaciones global dado por (4-83).

El hecho de construir, a partir de relaciones elementales ensambladas convenientemente, (que no deja de ser un proceso de suma) las relaciones globales no es otra cosa que una expresión del principio de superposición.

Este principio afirma que cuando las relaciones que gobiernan un proceso físico son lineales la solución del problema global es igual a la suma de las soluciones de varios subproblemas en los que se puede descomponer el problema original. Una descripción del principio de superposición aplicado a problemas donde se involucran materiales de comportamiento elástico lineal se puede encontrar en [18].

De este modo, cuando se tengan leyes de comportamiento no lineales, se estará cometiendo un error cuando se calculen las fuerzas interiores según (4-72) y (4-73). Por tanto:

$$F^{int} = \int_V \theta^T B^T \sigma dV \neq Kc + \Xi \dot{c} \quad (4-90)$$

Esto es debido a que para obtener (4-90) según los procesos de ensamblaje dados por (4-83), hace falta suponer que el principio de superposición será aplicable. La expresión de este hecho viene representada por las relaciones de equilibrio y compatibilidad dadas en (4-80) que dejarán de ser ciertas cuando la ley de compatibilidad deje de ser lineal.

Esta no linealidad vendrá provocada por el hecho de que los elementos de los tensores que aparecían en la ley de comportamiento (4-51) dependerán de las variables independientes y, por tanto,  $C_{ijkl}(\varepsilon_{kl})$  y  $\xi_{ijkl}(D_{kl})$ . Estas dependencias se traducirán de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) &\rightarrow K = K(c) \\ \xi(D) &\rightarrow \Xi = \Xi(\dot{c}) \end{aligned} \quad (4-91)$$

Y, por tanto, el sistema de ecuaciones algebraico que era lineal en (4-75) pasará a ser de la forma:

$$F^{ext} = K(c)c + \Xi(\dot{c})\dot{c} + M\ddot{c} \quad (4-92)$$

Este hecho producirá un marcado carácter de no linealidad, conllevando un desequilibrio en el balance de fuerzas dado en (4-67). De esta manera, para poder resolver el nuevo sistema se hace necesario imponer que este desequilibrio sea nulo, es decir:

$$[\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]_i = F^{int}(c, \dot{c})_i + F^{mas}(\ddot{c})_i - F^{ext}_i = 0 \quad (4-93)$$

Representando (4-93) la nueva relación a considerar. Para resolver esta ecuación, que como hemos expuesto ya no es lineal, se requerirá algún método iterativo de resolución. En este trabajo, se optará por el conocido Método de Newton-Raphson. Una descripción detallada de este método para sistema de ecuaciones puede encontrarse en [19] o en [20]. Para obtener una forma de este método se hace necesario hacer un desarrollo en serie de Taylor hasta primer orden de la función descrita en (4-93):

$$\begin{aligned} [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]_i &= [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]_i^0 \\ &+ \left[ \frac{\partial F^{int}(c, \dot{c})_i}{\partial c_s} + \frac{\partial F^{int}(c, \dot{c})_i}{\partial \dot{c}_r} \frac{\partial \dot{c}_r}{\partial c_s} + \frac{\partial F^{mas}(\ddot{c})_i}{\partial c_s} - \frac{\partial F^{ext}_i}{\partial c_s} \right] * \Delta c_s \end{aligned} \quad (4-94)$$

Utilizando las definiciones (4-68) y (4-69), se puede reescribir (4-94) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]_i &= [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]_i^0 \\
 &+ \left[ \frac{\partial}{\partial c_s} \left( \int_V \sigma_k B_{kj} \theta_{ji} dV \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{c}_r} \left( \int_V \sigma_k B_{kj} \theta_{ji} dV \right) \frac{\partial \dot{c}_r}{\partial c_s} \right. \\
 &\left. + \left( \int_V \rho \theta_{ji} \theta_{jk} dV \right) \frac{\partial \ddot{c}_k}{\partial c_s} - \frac{\partial F^{ext}_i}{\partial c_s} \right] * \Delta c_s
 \end{aligned} \quad (4-95)$$

Realizando la derivación de los términos integrales de las fuerzas internas se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial c_s} \left( \int_V \sigma_k B_{kj} \theta_{ji} dV \right) &= \int_V \frac{\partial \sigma_k}{\partial c_s} B_{kj} \theta_{ji} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_k}{\partial \varepsilon_h} \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial c_s} B_{kj} \theta_{ji} dV \\
 \frac{\partial}{\partial \dot{c}_r} \left( \int_V \sigma_k B_{kj} \theta_{ji} dV \right) &= \int_V \frac{\partial \sigma_k}{\partial \dot{c}_r} B_{kj} \theta_{ji} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_k}{\partial D_h} \frac{\partial D_h}{\partial \dot{c}_r} B_{kj} \theta_{ji} dV
 \end{aligned} \quad (4-96)$$

Que, utilizando (4-58) y (4-71), y definiendo unos tensores tangentes<sup>11</sup> apropiados permite escribir:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_k}{\partial \varepsilon_h} &= C_{kh}^T \\
 \frac{\partial \sigma_k}{\partial D_h} &= \xi_{kh}^T \\
 \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial c_s} &= B_{hv} \theta_{vs} \\
 \frac{\partial D_h}{\partial \dot{c}_r} &= B_{hv} \theta_{vr}
 \end{aligned} \quad (4-97)$$

Sustituyendo de vuelta (4-97) en (4-96) y ésta, a su vez, en (4-95) se tiene finalmente:

$$\begin{aligned}
 [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]_i &= [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]_i^0 \\
 &+ \left[ \int_V (B_{hv} \theta_{vs}) C_{kh}^T (B_{kj} \theta_{ji}) dV \right. \\
 &+ \left( \int_V (B_{hv} \theta_{vr}) \xi_{kh}^T (B_{kj} \theta_{ji}) dV \right) \frac{\partial \dot{c}_r}{\partial c_s} + \left( \int_V \rho \theta_{ji} \theta_{jk} dV \right) \frac{\partial \ddot{c}_k}{\partial c_s} \\
 &\left. - \frac{\partial F^{ext}_i}{\partial c_s} \right] * \Delta c_s
 \end{aligned} \quad (4-98)$$

Que también se puede escribir definiendo las matrices tangentes de rigidez y amortiguamiento y la matriz de masa:

$$K_{is}^T = \int_V (B_{hv} \theta_{vs}) C_{kh}^T (B_{kj} \theta_{ji}) dV \quad (4-99)$$

<sup>11</sup> Estos tensores tangentes  $C^T$  fueron introducidos en el Capítulo 2

$$\Xi_{ir}^T = \int_V (B_{hv} \theta_{vr}) \xi_{kh}^T (B_{kj} \theta_{ji}) dV$$

$$M_{ik} = \int_V \rho \theta_{ji} \theta_{jk} dV$$

O bien escritas según el proceso de ensamblaje que se definió en (4-83):

$$\begin{aligned} K_{is}^T &= \sum_{e=1}^E \left( E_{wi}^e \left( \int_V (B_{hv}^e N_{vq}^e) C_{kh}^{Te} (B_{kj}^e N_{jw}^e) dV \right) E_{qs}^e \right) \\ \Xi_{ir}^T &= \sum_{e=1}^E \left( E_{wi}^e \left( \int_V (B_{hv}^e N_{vq}^e) \xi_{kh}^{Te} (B_{kj}^e N_{jw}^e) dV \right) E_{qr}^e \right) \\ M_{ik} &= \sum_{e=1}^E \left( E_{wi}^e \left( \int_V \rho N_{jq}^e N_{jw}^e dV \right) E_{qk}^e \right) \end{aligned} \quad (4-100)$$

Y cuya versión en notación matricial se puede escribir:

$$\begin{aligned} K^T &= \sum_{e=1}^E \left( E^{eT} \left( \int_V N^{eT} B_e^T C_e^T B_e N^e dV \right) E^e \right) \\ \Xi^T &= \sum_{e=1}^E \left( E^{eT} \left( \int_V N^{eT} B_e^T \xi_e^T B_e N^e dV \right) E^e \right) \\ M &= \sum_{e=1}^E \left( E^{eT} \left( \int_V \rho N^{eT} N^e dV \right) E^e \right) \end{aligned} \quad (4-101)$$

Es interesante notar que las definiciones que se han dado para los tensores tangentes en (4-97) devuelven los tensores  $C$  y  $\xi$  de la ley de comportamiento que se definieron en (4-70) cuando las leyes son lineales. Sustituyendo (4-100) en (4-98) y forzando (4-93):

$$\begin{aligned} 0 &= [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]^0 + \left[ K^T + \Xi^T \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} + M \frac{\partial \ddot{c}}{\partial c} - \frac{\partial F^{ext}}{\partial c} \right] * (c - c^0) \\ &= [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]_i^0 + \left[ K_{is}^T + \Xi_{ir}^T \frac{\partial \dot{c}_r}{\partial c_s} + M_{ik} \frac{\partial \ddot{c}_k}{\partial c_s} - \frac{\partial F^{ext}_i}{\partial c_s} \right] * (c_s - c_s^0) \end{aligned} \quad (4-102)$$

Y finalmente se tendrá despejando de (4-102):

$$c = c^0 - \left[ K^T + \Xi^T \frac{\partial \dot{c}}{\partial c} + M \frac{\partial \ddot{c}}{\partial c} - \frac{\partial F^{ext}}{\partial c} \right]^{-1} * [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]^0 \quad (4-103)$$

La expresión (4-103) proporciona un método iterativo que permitirá encontrar una solución para el vector de desplazamientos nodales  $c$ . Antes de exponer este método, conviene notar que tanto la expresión (4-75) para problemas lineales como la (4-103) para problemas no

lineales están escritas en términos tanto del vector de desplazamientos nodales como de las velocidades y aceleraciones nodales. Tal y como se comentó en el apartado anterior, para reducir el número de incógnitas, en el caso de que se quisiera resolver problemas visco elásticos o problemas dinámicos, sería necesario discretizar el problema temporal mediante un método, por ejemplo, de diferencias finitas que permitiese escribir las componentes de las velocidades y aceleraciones en términos de las componentes del vector desplazamiento.

Dado que las necesidades de esta tesis se centran en la resolución de problemas no lineales en régimen estático, no se incluirá un desarrollo minucioso de esta discretización temporal. Sin embargo, con la intención de hacer un breve apunte sobre algún ejemplo de discretización se dirá que uno de los métodos más utilizados por su versatilidad es el llamado Método de Newmark que, entre otras ventajas, tiene la virtud de ser un método de fácil implementación numérica. Además, resulta incondicionalmente estable en problemas elásticos lineales ya que basa el cálculo de la velocidad y la posición en aproximar la integral de la aceleración en vez de utilizar el valor instantáneo de la misma.

Este método permite escribir la aceleración y la velocidad en un instante en función de la aceleración, velocidad y desplazamiento del instante anterior. Estas expresiones se escriben:

$$\begin{aligned}\ddot{c}^{t+\Delta t} &= \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2}\right)(c^{t+\Delta t} - c^t - \dot{c}^t \Delta t) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{c}^t \\ \dot{c}^{t+\Delta t} &= \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t}\right)(c^{t+\Delta t} - c^t) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{c}^t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{c}^t \Delta t\end{aligned}\quad (4-104)$$

Las constantes  $\beta$  y  $\gamma$  son constantes cuyo valor determinan la estabilidad del método. Las expresiones (4-104) han sido tomadas de [21]. Adicionalmente, una exposición del desarrollo que permite obtener dichas expresiones puede también encontrarse en dicha referencia. Las expresiones (4-104) proporcionan el valor de las derivadas que aparecen en (4-103). Así, derivando en (4-104) se tiene que<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} I \\ \frac{\partial \ddot{c}}{\partial c} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} I\end{aligned}\quad (4-105)$$

Sustituyendo (4-105) en (4-103) se obtiene:

$$c = c^0 - \left[ K^T + \Xi^T \frac{\gamma}{\beta \Delta t} I + M \frac{1}{\beta \Delta t^2} I - \frac{\partial F^{ext}}{\partial c} \right]^{-1} * [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]^0 \quad (4-106)$$

Teniendo en cuenta las necesidades de esta tesis, se introducirán dos simplificaciones que proporcionarán finalmente, la expresión iterativa que utilizaremos para despejar el vector de desplazamientos nodales. Estas simplificaciones son:

<sup>12</sup> El término  $I$  hace referencia a la matriz unidad de dimensiones  $3N \times 3N$ .

- Estaremos interesados, como ya se ha comentado, en analizar problemas elásticos en régimen estático. Por ello las matrices de amortiguamiento y masa serán nulas.
- En consonancia con la hipótesis de pequeñas deformaciones, la geometría deformada será muy parecida a la que se tenía antes de la aplicación de la carga. En este sentido, se hace consistente el despreciar la variación de las fuerzas externas con respecto a los desplazamientos nodales. Así el término  $\frac{\partial F^{ext}}{\partial c}$  habitualmente se desprecia cuando las cargas aplicadas no varían cuando crecen los desplazamientos; esto último se encuentra en consonancia con una aplicación cuasi-estática de las cargas.

Tras estas consideraciones la expresión (4-106) se puede escribir:

$$c = c^0 - [K^T]^{-1} * [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]^0 \quad (4-107)$$

Evidentemente, para que el método iterativo que se quiere aplicar converja a la solución, debe partirse de un valor  $c^0$  que esté suficientemente cerca de la raíz que se quiere calcular. Además, la función en ese entorno debe tener una forma apropiada. Una situación como la que se acaba de describir se muestra en la siguiente figura:

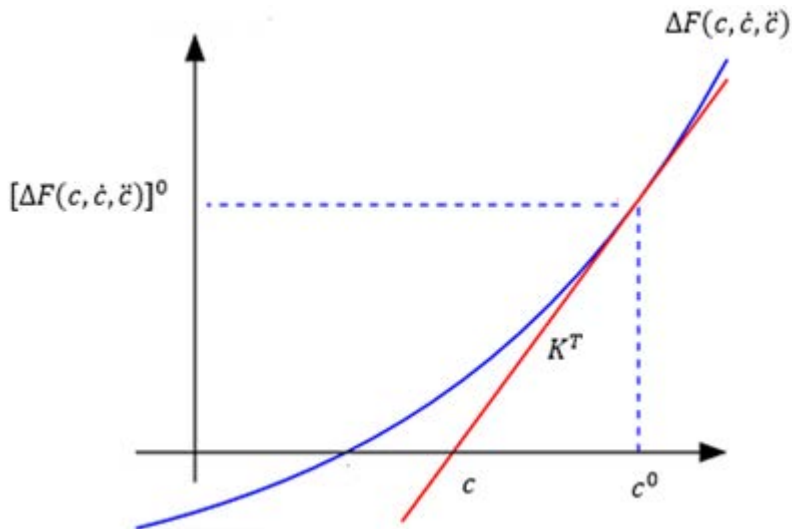


Figura 4.4. Método de Newton-Raphson

Tal y como se muestra en el ejemplo representado en la Figura 4.4, la forma de la función debe ser tal que cuando se utilice el tensor de rigidez tangente para aproximar la función en

ese punto, el nuevo valor que se encuentre para el vector de desplazamientos nodales esté más próximo a la raíz que el anterior. Esta propiedad quedará así en función de la característica de convexidad de la función en el entorno de la raíz y de la cercanía del valor inicial que se utilice como primera aproximación. Para conseguir que todos los valores de aproximación a la raíz sucesivos queden dentro de la zona de atracción es conveniente dar incrementos suficientemente pequeños.

Para resolver el problema se planteará un esquema iterativo, que parte de la suposición de que los vectores de fuerzas externas y desplazamientos se encuentran divididos según los elementos de magnitudes impuestas y desconocidas que se describieron en (4-85). El esquema es el siguiente:



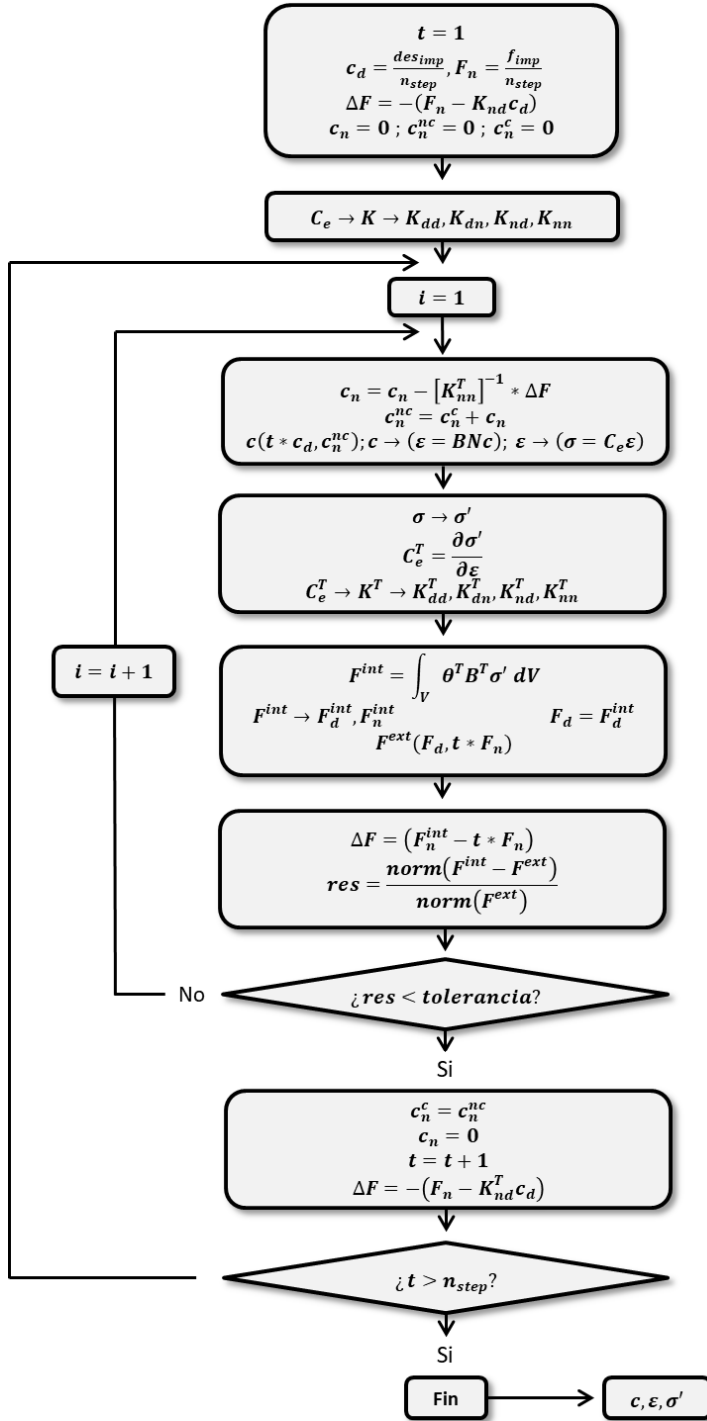


Figura 4.5. Esquema del método iterativo propuesto para el esquema de elementos finitos

Los pasos que se describen en el esquema iterativo se desarrollan a lo largo de un número  $n_{step}$  total de incrementos temporales. Aunque se asume que el proceso de aplicación de la carga es estático y, por tanto, se podrían aplicar en un solo paso, admitiremos la división temporal a efectos de contar con una mejor convergencia del método iterativo de resolución. Por este motivo los desplazamientos y fuerzas impuestas  $des_{imp}$  y  $f_{imp}$  se subdividen en  $n_{step}$  incrementos iguales de magnitudes  $c_d$  y  $F_n$  respectivamente. Los pasos que se indican en cada uno de los bloques del diagrama se describen a continuación:

- En el primer paso, se parte de unos incrementos de desplazamientos y de cargas exteriores nodales  $c_d$  y  $F_n$  conocidos. Se inicializa tanto el índice de iteración de los incrementos temporales  $t$  a uno como el desequilibrio de fuerzas  $\Delta F$  igualándolo al vector de fuerzas conocido según (4-86) cambiado de signo. También se inicializan a cero los vectores  $c_n$ ,  $c_n^c$  y  $c_n^{nc}$ . Estos vectores representan respectivamente los incrementos de desplazamiento nodal desconocidos en ese paso temporal, los desplazamientos nodales totales acumulados de los incrementos temporales anteriores y los desplazamientos nodales totales acumulados del paso de iteración actual que aún no han convergido en el bucle interior.
- En el segundo paso, se obtiene la matriz de rigidez elástica del sistema. Se parte de las leyes de comportamiento elementales  $C_e$  y mediante (4-101) se obtiene la matriz de rigidez global del sistema  $K$ . A continuación, se separa por bloques que tienen ordenados los grados de libertad de la manera explicitada en (4-85).
- Se inicializa a uno el índice de iteración para el bucle interior.
- Se da un paso del Método de Newton-Raphson según (4-107). Con el valor  $c_n$  obtenido se actualiza el vector  $c_n^{nc}$  que contiene los desplazamientos nodales totales para ese paso de iteración. Con estos valores se compone el vector de desplazamientos nodales para el paso actual de iteración  $c$  que contiene tanto los desplazamientos conocidos como los desconocidos en ese paso de iteración. A partir de él se calculan las deformaciones y tensiones que se tendrían si el problema fuera elástico.
- En este bloque, se calcula a partir del modelo de plasticidad o daño las tensiones  $\sigma'$  que se tendrán con el nivel de deformación actual. También se calculan los tensores tangentes elementales que tienen en cuenta la degradación de la rigidez. A continuación, se ensamblan los tensores tangentes elementales para obtener la matriz de rigidez tangente, de nuevo, usando (4-101) y se definirán las matrices tangentes por bloques análogas a las definidas en el segundo paso.
- A partir de (4-90) y las tensiones obtenidas  $\sigma'$  se obtiene el vector de fuerzas internas nodales  $F^{int}$ . Este vector se separa en dos vectores  $F_d^{int}, F_n^{int}$  que contienen las

fuerzas internas de los nodos cuyos desplazamientos son impuestos y de aquellos nodos sobre los que se imponen fuerzas exteriores respectivamente. Las fuerzas exteriores sobre los nodos donde se aplican desplazamientos y que eran desconocidas se igualan a las fuerzas interiores  $F_d^{int}$  de aquellos nodos donde se imponen desplazamientos. Además, se compone el vector de fuerzas exteriores nodales para el paso actual de iteración  $F^{ext}$  que contiene tanto las fuerzas nodales aplicadas y, por tanto, conocidas como las fuerzas exteriores que eran desconocidas en ese paso de iteración.

- Se define el nuevo valor de la función  $\Delta F$  como la diferencia entre las fuerzas internas y las fuerzas externas que permitirá dar el siguiente paso iterativo. Este vector contiene el valor de la función  $\Delta F$  en los nodos donde se aplican fuerzas exteriores como condición de contorno. Además, se calcula el *residuo* normalizado que se tiene en este paso de iteración.
- Se evalúa si el residuo es menor que una tolerancia definida como elemento de configuración del método. Si no es así, se aumenta el índice de iteración en uno y se vuelve al paso cuarto. Por el contrario, si la respuesta es afirmativa se actualiza el vector  $c_n^c$  de desplazamientos nodales totales para los pasos ya convergidos. Además se inicializa a cero el vector  $c_n$ , se aumenta en uno el índice de iteración de los incrementos temporales  $t$  y se vuelve a igualar el vector  $\Delta F$  al vector de fuerzas conocido según (4-86) cambiado de signo teniendo en cuenta el nuevo tensor tangente de rigidez  $K_{nd}^T$ .
- Por último, se evalúa si el índice de incrementos temporales es mayor que el número máximo de incrementos temporales que se quieren dar. En caso negativo, se vuelve al tercer paso. En caso afirmativo, el método termina y se proporcionan los desplazamientos nodales, las deformaciones y las tensiones.

## 4.4. Funciones de forma y puntos de cuadratura

El esquema de elementos finitos que se ha descrito en el apartado anterior permite obtener la solución para las deformaciones, tensiones y desplazamientos que se tendrán en el dominio sólido sometido a un sistema de cargas estático y unas condiciones de contorno determinadas cuando se consideran modelos de daño o plasticidad que permiten configurar un problema no lineal.

Sin embargo y aunque el esquema anterior es funcional, faltan por especificar tres aspectos para tener un esquema que sea totalmente operativo. Estos tres aspectos son:

- Es necesario especificar las *funciones de forma* que se definieron en (4-77) y que permiten realizar el proceso de ensamblaje definido en (4-83), (4-100) y (4-101). A su vez, estas funciones de forma estarán definidas sobre el conjunto de elementos finitos que permitirán discretizar el sólido y que deberán ser adecuados para las geometrías que se quieran tratar.
- Es necesario concretar una forma matricial concreta para el operador  $B$  definido en (4-59). Esta forma matricial concreta actuará sobre las funciones de forma que se definan.
- También es necesario sistematizar una forma de calcular las integrales de volumen que aparecen en las expresiones de las fórmulas dadas, de nuevo, en (4-83), (4-100) y (4-101). Para ello será necesario alguna fórmula de cuadratura que permita sistematizar el cálculo de estas integrales.

En este último apartado del presente capítulo se describirá como se abordarán los tres aspectos que se han señalado.

### Elementos isoparamétricos de ocho nodos y funciones de forma

Dado que estaremos interesados en resolver geometrías tridimensionales, será necesario disponer de tres grados de libertad por nodo; dos horizontales que llamaremos  $u$  y  $v$  situados en el plano  $XY$  en ejes globales y otro vertical llamado  $w$  situado perpendicular a los dos anteriores, siendo los tres grados de libertad de desplazamiento.

Teniendo en cuenta que las tipologías de interés en esta tesis son laminados, fundamentalmente rectangulares, de material compuesto se utilizarán elementos hexaédricos en cuyos vértices habrá nodos definidos. Cada uno de estos elementos  $e$  tendrá, en cada uno de sus nodos, una función  $N_i^e$  que tomará valor uno en el nodo  $i$  y cero en los otros nodos del elemento. Asimismo, los valores de la función  $N_i^e$  serán nulos en cualquier otro elemento distinto del  $e$ .

Dado que las funciones de forma están definidas en el entorno del elemento es necesario definir un cambio de variables que relacione las coordenadas locales con las coordenadas globales del problema. Estos cambios de variable permitirán implementar computacionalmente la expresión analítica de las funciones de forma.

Una esquematización del cambio de variables que transforme las coordenadas globales  $x$ ,  $y$  y  $z$  del problema en las coordenadas locales o naturales  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\varphi$  definidas en el entorno de cada elemento se muestra en la Figura 4.6:

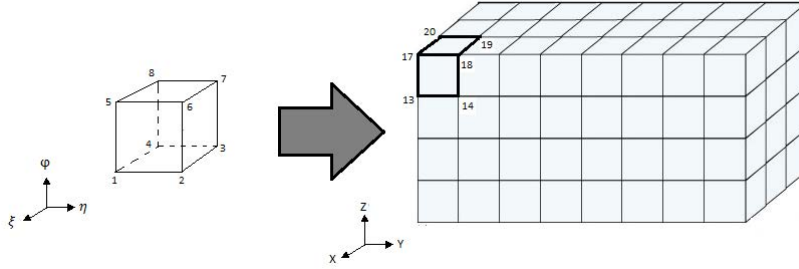


Figura 4.6. Cambio de variables entre las coordenadas locales elementales  $(\xi, \eta, \varphi)$  y las coordenadas globales  $(x, y, z)$

La relación entre las coordenadas globales y las naturales se puede expresar:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta, \varphi) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \varphi) x_i^e \\ y(\xi, \eta, \varphi) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \varphi) y_i^e \\ z(\xi, \eta, \varphi) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \varphi) z_i^e \end{aligned} \quad (4-108)$$

De la misma manera, las componentes de los desplazamientos en términos de las coordenadas naturales se pueden poner:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \varphi) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \varphi) u_i^e \\ v(\xi, \eta, \varphi) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \varphi) v_i^e \\ w(\xi, \eta, \varphi) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \varphi) w_i^e \end{aligned} \quad (4-109)$$

Los elementos elegidos se denominan *elementos isoparamétricos* debido a que utilizan las mismas funciones de forma para definir el cambio de variables que para interpolar los desplazamientos. Si suponemos los ejes naturales centrados en el cubo de lado dos, representado en el lado izquierdo de la Figura 4.6, las ocho funciones de forma  $N_i(\xi, \eta, \varphi)$  asociadas a un elemento concreto se pueden escribir:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta, \varphi) &= \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta - 1)(\varphi - 1) \\
 N_2(\xi, \eta, \varphi) &= \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(1 - \varphi) \\
 N_3(\xi, \eta, \varphi) &= \frac{1}{8}(\xi - 1)(\eta + 1)(\varphi - 1) \\
 N_4(\xi, \eta, \varphi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(\eta - 1)(\varphi - 1) \\
 N_5(\xi, \eta, \varphi) &= \frac{1}{8}(\xi + 1)(1 - \eta)(\varphi + 1) \\
 N_6(\xi, \eta, \varphi) &= \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(\varphi + 1) \\
 N_7(\xi, \eta, \varphi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(\eta + 1)(\varphi + 1) \\
 N_8(\xi, \eta, \varphi) &= \frac{1}{8}(\xi - 1)(\eta - 1)(\varphi + 1)
 \end{aligned} \tag{4-110}$$

Una descripción de este tipo de elementos y funciones de forma puede encontrarse en [17]. Si se deriva (4-108) se obtiene la matriz jacobiana<sup>13</sup> del cambio de variables:

<sup>13</sup> Los elementos de la matriz de la transformación  $(x, y, z \rightarrow \xi, \eta, \varphi)$  de forma habitual se escriben  $J^e =$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ . En este caso, se optará por un jacobiano ordenado según (4-111).

$$\begin{aligned}
J^e &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_7(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_8(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_7(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_4(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_5(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_6(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_7(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_8(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (\eta-1)(\varphi-1) & (\eta+1)(1-\varphi) & (\eta+1)(\varphi-1) & (1-\eta)(\varphi-1) & (1-\eta)(\varphi+1) & (\eta+1)(\varphi+1) & -(\eta+1)(\varphi+1) & (\eta-1)(\varphi+1) \\ (\xi+1)(\varphi-1) & (\xi+1)(1-\varphi) & (\xi-1)(\varphi-1) & (1-\xi)(\varphi-1) & (\xi+1)(\varphi+1) & (\xi+1)(\varphi+1) & (1-\xi)(\varphi+1) & (\xi-1)(\varphi+1) \\ (\xi+1)(\eta-1) & -(\xi+1)(\eta+1) & (\xi-1)(\eta+1) & (1-\xi)(\eta-1) & (\xi+1)(\eta+1) & (\xi+1)(\eta+1) & (1-\xi)(\eta+1) & (\xi-1)(\eta-1) \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e & z_1^e \\ x_2^e & y_2^e & z_2^e \\ x_3^e & y_3^e & z_3^e \\ x_4^e & y_4^e & z_4^e \\ x_5^e & y_5^e & z_5^e \\ x_6^e & y_6^e & z_6^e \\ x_7^e & y_7^e & z_7^e \\ x_8^e & y_8^e & z_8^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e & z_1^e \\ x_2^e & y_2^e & z_2^e \\ x_3^e & y_3^e & z_3^e \\ x_4^e & y_4^e & z_4^e \\ x_5^e & y_5^e & z_5^e \\ x_6^e & y_6^e & z_6^e \\ x_7^e & y_7^e & z_7^e \\ x_8^e & y_8^e & z_8^e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(4-111)

Análogamente, el jacobiano inverso escrito a partir de los elementos mostrados en (4-111) se escribe:

$$\begin{aligned}
 J^{e-1} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\det(J^e)} \begin{pmatrix} (J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}) & -(J_{12}J_{33} - J_{32}J_{13}) & (J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13}) \\ -(J_{21}J_{33} - J_{23}J_{31}) & (J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31}) & -(J_{11}J_{23} - J_{21}J_{13}) \\ (J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31}) & -(J_{11}J_{32} - J_{12}J_{31}) & (J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-112}$$

Los desplazamientos de los nodos del elemento  $e$ :

$$c^e = \begin{pmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ w_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ w_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ w_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \\ w_4^e \\ u_5^e \\ v_5^e \\ w_5^e \\ u_6^e \\ v_6^e \\ w_6^e \\ u_7^e \\ v_7^e \\ w_7^e \\ u_8^e \\ v_8^e \\ w_8^e \end{pmatrix} \tag{4-113}$$

Para obtener las componentes de las deformaciones elementales es necesario derivar (4-109) según (4-59):



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}^e &= \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{xz}^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) u_i^e \\ \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) v_i^e \\ \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial z} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) w_i^e \\ \sum_{i=1}^8 \left[ \left( \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial z} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) v_i^e + \left( \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) w_i^e \right] \\ \sum_{i=1}^8 \left[ \left( \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial z} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) u_i^e + \left( \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) v_i^e \right] \\ \sum_{i=1}^8 \left[ \left( \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) u_i^e + \left( \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \varphi} \right) v_i^e \right] \end{pmatrix} \quad (4-114)
\end{aligned}$$

Que si se definen las matrices:

(4-115)

(4-116)

Y, usando (4-113), (4-115) y (4-116), el vector de deformaciones de un elemento se podrá escribir empleando los elementos del jacobiano y las parciales de cada función de forma en coordenadas locales:

$$\varepsilon^e = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \varepsilon_z^e \\ \gamma_{yz}^e \\ \gamma_{xz}^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} = B_e N^e c^e = \begin{pmatrix} P_n^e Q_n^e \\ P_t^e Q_t^e \end{pmatrix} c^e \quad (4-117)$$

Teniendo en cuenta (4-117), las matrices de rigidez de cada elemento se pueden escribir usando (4-84):

$$k^e = \int_{V^e} N^{eT} B_e^T C_e^T B_e N^e dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} P_n^e Q_n^e \\ P_t^e Q_t^e \end{pmatrix}^T C_e^T \begin{pmatrix} P_n^e Q_n^e \\ P_t^e Q_t^e \end{pmatrix} \det(J^e) d\xi d\eta d\varphi \quad (4-118)$$

Donde  $V^e$  representa el dominio volumétrico del elemento. Sustituyendo (4-118) en (4-107), tendremos para el método iterativo descrito en el apartado 4.3:

$$c = c^0 - \left[ \sum_{e=1}^E \left( E^{eT} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} P_n^e Q_n^e \\ P_t^e Q_t^e \end{pmatrix}^T C_e^T \begin{pmatrix} P_n^e Q_n^e \\ P_t^e Q_t^e \end{pmatrix} \det(J^e) d\xi d\eta d\varphi \right) E^e \right) \right]^{-1} * [\Delta F(c, \dot{c}, \ddot{c})]^0 \quad (4-119)$$

Que constituye una forma funcional del Método de Newton-Raphson que permite calcular los desplazamientos nodales sobre un soporte de elementos finitos cuando se utilizan elementos isoparamétricos de ocho nodos y se definen  $N$  nodos totales y  $e$  elementos (3 grados de libertad en cada nodo,  $3N$  grados de libertad en total y 8 nodos elementales). Los factores que se tienen en (4-119) se describen a continuación:

- $\Delta F(3Nx1)$  es el vector que contiene el desequilibrio entre las fuerzas externas e internas nodales en la numeración global.
- $C_e^T(6x6)$  es la ley de comportamiento elemental cuyos elementos dependerán en general de las deformaciones.
- $P_n^e, P_t^e(3x9)$  son las matrices definidas en (4-115) y (4-116) y que contienen los elementos de la matriz jacobiana.
- $Q_n^e, Q_t^e(9x24)$  son las matrices definidas en (4-115) y (4-116) y que contienen las derivadas de las funciones de forma.

- $E^e(24 \times 3N)$  representan las matrices de ensamblaje definidas en (4-82) que relacionan la forma en que se ordenan los nodos en el problema global con la forma en que se ordenan dentro de cada elemento.
- $c$  y  $c^0(3N \times 1)$  representan la iteración actual y la anterior respectivamente del vector que contiene el desplazamiento de todos los nodos organizados según el orden global.

## Puntos de cuadratura

Para efectuar numéricamente las integrales que aparecen en (4-118) y poder disponer de las matrices de rigidez local elementales, se emplearán fórmulas de cuadratura gaussianas.

Las reglas de cuadratura son fórmulas que permiten aproximar el valor de una integral definida mediante la suma del valor de la función del integrando evaluada en determinados puntos y multiplicados por unos coeficientes  $C_i$ . Los puntos donde se evalúan dichas funciones reciben el nombre de *puntos de cuadratura* y deben ser elegidos para minimizar el error que se comete al utilizar la fórmula de cuadratura.

Una fórmula de cuadratura que aproxime la integral dada en (4-118), adoptaría la forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^S C_i f(x_i) \quad (4-120)$$

Teniendo en cuenta cuál es el grado de los polinomios que se manejan será suficiente con considerar dos sumandos en la regla de aproximación ( $S = 2$ ). Si se eligieran más sumandos, la aproximación mejoraría a cambio de aumentar el coste del cálculo.

Habiendo fijado  $S = 2$ , según (4-120), habrá que determinar  $C_1$  y  $C_2$  y la posición de los puntos de cuadratura que llamaremos  $x_1$  y  $x_2$ . Disponiendo de cuatro coeficientes a fijar, el máximo grado del polinomio que se puede aproximar de forma exacta con una fórmula de cuadratura como la que se tiene es tres. La integral de este polinomio vendrá determinada por los cuatro coeficientes del mismo que serán  $a_3$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  y  $a_0$ . Así:

$$\begin{aligned} \int_a^b (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) dx &= \left[ \frac{a_3}{4} x^4 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + D \right]_a^b \\ &= \frac{a_3}{4} (b^4 - a^4) + \frac{a_2}{3} (b^3 - a^3) + \frac{a_1}{2} (b^2 - a^2) + a_0 (b - a) \end{aligned} \quad (4-121)$$

Para el caso  $a = -1$  y  $b = 1$ , si se igualan (4-120) y (4-121), se obtiene un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $C_1$  y  $C_2$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_3}{4}(1^4 - (-1)^4) + \frac{a_2}{3}(1^3 - (-1)^3) + \frac{a_1}{2}(1^2 - (-1)^2) + a_0(1 - (-1)) \\
 &= C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) \\
 &= C_1(a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0) \\
 &+ C_2(a_3 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0)
 \end{aligned} \tag{4-122}$$

Así se obtiene:

$$\begin{aligned}
 C_1 x_1^3 + C_2 x_2^3 &= 0 \\
 C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 &= \frac{2}{3} \\
 C_1 x_1 + C_2 x_2 &= 0 \\
 C_1 + C_2 &= 2
 \end{aligned} \tag{4-123}$$

Que tras despejar:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 1 \\
 C_2 &= 1 \\
 x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
 x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{4-124}$$

Así, (4-120) queda:

$$I \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{4-125}$$

Dado el proceso que se ha seguido, esta fórmula aproxima exactamente polinomios de grado tres o menor. Complementariamente, (4-125) se puede utilizar para aproximar integrales múltiples como las que se tienen en (4-118). Para ello, será suficiente con aplicarla sucesivamente. Así:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz \\
&\approx \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, y, z\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, y, z\right) \right) dy dz \\
&\approx \int_{-1}^1 \left( f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, z\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, z\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, z\right) \right. \\
&\quad \left. + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, z\right) \right) dz \\
&\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\quad + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\quad + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned} \tag{4-126}$$

Así, el resultado de las integrales que se dan en (4-118) se puede obtener sumando el valor del integrando, evaluado en los puntos que se han explicitado en (4-126). Estos puntos se denominan *puntos de cuadratura* y se muestran a continuación:

$k$	$\xi_k$	$\eta_k$	$\varphi_k$
1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
5	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
6	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
7	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
8	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Tabla 4-1. Puntos de cuadratura para las integrales de las matrices de rigidez elementales

De esta manera, la matriz de rigidez local de cada elemento se obtendrá utilizando (4-118), sustituyendo en ella la regla dada en (4-126). Sólo serán necesarias las coordenadas nodales para calcular el jacobiano y los puntos de cuadratura dados en la Tabla 4-1:

$$k^e \approx \sum_{k=1}^8 \begin{pmatrix} P_n^e(\xi_k, \eta_k, \varphi_k) Q_n^e(\xi_k, \eta_k, \varphi_k) \\ P_t^e(\xi_k, \eta_k, \varphi_k) Q_t^e(\xi_k, \eta_k, \varphi_k) \end{pmatrix}^T C_e^T \begin{pmatrix} P_n^e(\xi_k, \eta_k, \varphi_k) Q_n^e(\xi_k, \eta_k, \varphi_k) \\ P_t^e(\xi_k, \eta_k, \varphi_k) Q_t^e(\xi_k, \eta_k, \varphi_k) \end{pmatrix} \det(J^e(\xi_k, \eta_k, \varphi_k)) \quad (4-127)$$

## Recuperación de gradientes

Tras ejecutar el método que se ha descrito en el esquema de la Figura 4.5, se dispone de los desplazamientos nodales que, a partir de (4-109), proporcionan los desplazamientos en el interior de cada elemento. A su vez, utilizando (4-117) y (4-70), se obtendrán las variables de tensión y deformación en el interior de cada elemento.

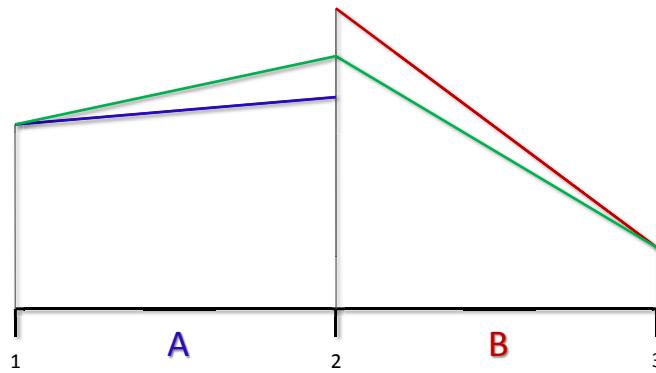
Dentro de cada uno de estos elementos, los desplazamientos serán continuos y unievaluados ya que se obtienen según funciones de forma con las mismas propiedades. Además, dado que, en los nodos, los desplazamientos tienen el valor que proporciona el método que se ha descrito, las componentes de los desplazamientos serán continuas a lo largo de todo el dominio y evolucionarán según formas lineales.

Sin embargo, los campos de tensiones y deformaciones que son continuos dentro de un mismo elemento serán discontinuos al pasar de un elemento a otro. Esto es debido a que las fórmulas de interpolación para las deformaciones, dadas en (4-117), cambian cuando se pasa de un elemento a otro (ya que cambian las coordenadas y los desplazamientos nodales).

Este resultado que propone campos de deformaciones y tensiones discontinuos aparentemente contradice el carácter que la Mecánica de los Medios Continuos propone para las variables que se estudian. Sin embargo, es importante recordar que el Método de los Elementos Finitos propone soluciones que deben tomarse como aproximaciones a la solución y garantiza que, bajo determinadas condiciones, la solución que proporciona tiende a la solución del problema cuando el tamaño de los elementos tiende a cero. En este proceso al límite, el valor de las tensiones y deformaciones en los nodos debe ir acercándose al valor que proporciona el método para las deformaciones y tensiones de los elementos contiguos.

En este sentido, es importante resaltar que el proceso que propone el Método de los Elementos Finitos, en cualquiera de sus formas, termina cuando se obtienen las variables nodales (desplazamientos en este caso). Para obtener (con un interés meramente gráfico) campos continuos de deformaciones y tensiones, se pueden procesar los resultados de diferentes maneras. Una de ellas consiste en utilizar variaciones lineales de las variables desde el valor de éstas en los nodos. Previamente se calculan los valores nodales como la media de los valores que se tienen cuando se aproximan los campos desde los diversos elementos que son contiguos en el nodo en cuestión. Un ejemplo correspondiente a un caso donde se tengan dos elementos y tres nodos se muestra en la Figura 4.7:

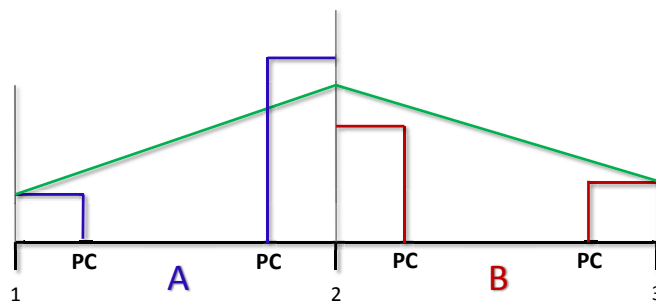




**Figura 4.7.** Estrategia de composición de los campos de tensión y deformación basada en promedios

En este caso, el campo de deformaciones para el elemento *B* (rojo) evoluciona de forma lineal entre los nodos 2 y 3 mientras que el mismo campo en el elemento *A* (azul) evoluciona entre los nodos 1 y 2. En el nodo central el valor del campo se asimila al valor medio de los valores provenientes de cada uno de los elementos. El campo continuo y de evolución lineal que se considera (verde), evoluciona desde los nodos 1 al 3 adquiriendo un valor en el centro calculado según el promedio que se ha indicado.

Una posibilidad más elaborada consiste en calcular el valor de los campos en los nodos como la media de los valores que se tienen en los puntos de cuadratura de cada elemento contiguo al nodo en cuestión. A partir de aquí, se suponen evoluciones lineales de los campos que ya serán continuas. Esta estrategia se muestra en la Figura 4.8:



**Figura 4.8.** Estrategia de composición de los campos de tensión y deformación basada en promedios de los valores de los puntos de cuadratura

Los valores de los campos en los puntos de cuadratura (denominados *PC* en el esquema de la Figura 4.8) son resultados que provienen directamente de la solución del Método de Elementos Finitos por lo que serán unos valores más representativos de la solución del problema real. En general, los resultados que se muestran en los capítulos posteriores en este

trabajo corresponden a los valores de tensiones, deformaciones y parámetros de daño en los puntos de cuadratura.

# Bibliografía

- [1] Oliver, X. & Agelet, C., Mecánica de medios continuos para ingenieros, 2000.
- [2] Ottosen, N. S. & Ristinmaa, M., The Mechanics of Constitutive Modelling, 2005.
- [3] Burden, R.L. & Douglas, J., «11. Problemas de valor en la frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias,» de *Análisis Numérico*, pp. 660-672.
- [4] Clough, R.W., The finite element in plane stress analysis, Pittsburg Pa.: Proc. 2nd. A.S.C.E. Conf on Electronic Computation, 1960.
- [5] Clough, R.W., The finite element method in structural mechanics, 1965.
- [6] Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., Finite Element Method, McGraw-Hill Book Company, 1994.
- [7] París, F., «6. Teoremas y Principios de la elasticidad. Conceptos energéticos,» de *Teoría de la elasticidad*, 2000, pp. 198-222.
- [8] Willis, J.R., «3. Energy Relations,» de *Mechanics of Composites*, University of Cambridge, pp. 16-22.
- [9] Barrero, A. & Perez-Saborid, M., Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos, Mc\_Graw Hill.
- [10] Brey, J. & de la Rubia, J., «2. Conexión entre la mecánica estadística y la termodinámica,» de *Mecánica Estadística*, 2001, pp. 31-66.
- [11] Maugin, G.A., The thermomechanics of plasticity and fracture, Cambridge University Press, 1992.
- [12] Brey, J. & de la Rubia, J., «3. Colectividad Canónica,» de *Mecánica Estadística*, 2001, pp. 67-100.
- [13] Malvern, L., Introduction to the mechanics of continuous medium, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1969.
- [14] Lubliner, J., Plasticity Theory, New York: Mac Millan, 1990.
- [15] Oller, S., «B2 Bases Termodinámicas de la Ecuación del Movimiento,» de *Dinámica No Lineal*, 2001, pp. 2-1 a 2-14.
- [16] Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., «2. Elementos finitos de un continuo elástico. Método de los desplazamientos,» de *Finite Element Method, VOL 1*, 1994, pp. 23-31.

- [17] Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., «7. Funciones de forma para elementos estándar y jerárquicos: Algunas familias generales,» de *Finite Element Method, VOL 1*, 1994, pp. 115-155.
- [18] Anderson, T.L., «2. Linear Elastic Fracture Mechanics,» de *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*, 2005, pp. 54-56.
- [19] Ottosen, N. S. & Ristinmaa, M., «17.4 Newton-Rahpson Scheme,» de *The Mechanics of Constitutive Models*, 2005, pp. 440-445.
- [20] Burden, R.L. & Douglas, J., «10. Soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones no lineales,» de *Análisis Numérico*, pp. 611-620.
- [21] Oller, S., «B3 Resolución de la Ecuación del Movimiento,» de *Dinámica No-Lineal*, Barcelona, 2001, pp. 3-6; 3-10.

## 5. Teoría de Mezclas Serie/Paralelo



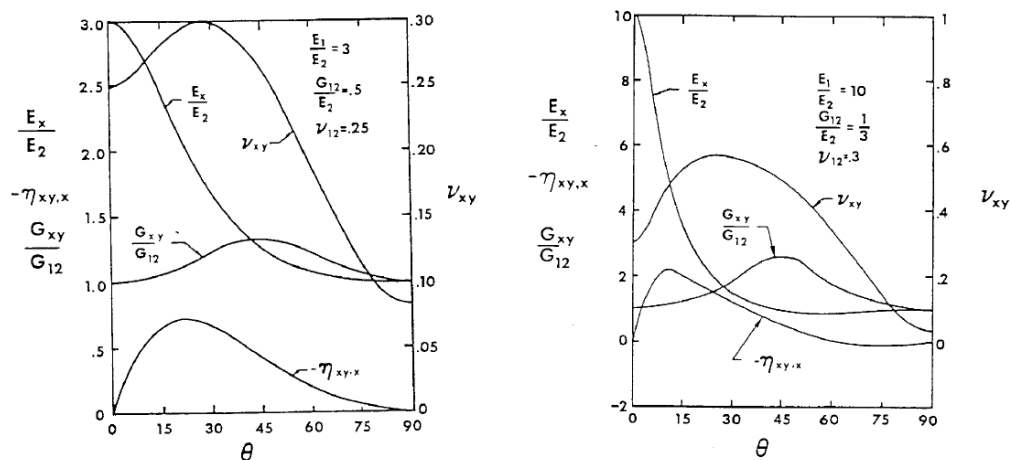
## 5.1. Introducción

Una de las principales dificultades que conlleva el uso de materiales compuestos se encuentra asociada a la complejidad constitutiva de estos materiales y viene fundamentalmente producida por la presencia, al menos, de dos materiales constituyentes en el seno del material compuesto. Estos dos constituyentes son, como ya se ha comentado en capítulos anteriores, el material base que conforma la estructura y que embebe al material compuesto, llamado matriz, y el material cuya misión es reforzar el conjunto en una determinada dirección y que recibe el nombre de fibra. Éste último nombre se otorga cuando el refuerzo se encuentra distribuido a lo largo de una dirección cuya dimensión es mucho más grande que las otras dos. Tal y como se indicó también anteriormente, es en este último conjunto de materiales compuestos en el que se centra este trabajo.

Esta dificultad estriba fundamentalmente en que la caracterización del comportamiento mecánico del material en el laboratorio se hace considerando a éste como un único ente homogéneo del cual se obtienen unas propiedades que dada la naturaleza del mismo presentan características mecánicas de anisotropía.

Sin embargo, tradicionalmente la consideración de láminas de material compuesto cuyas constantes mecánicas se representan como anisótropas viene asociada al hecho de que los ejes de aplicación de la carga se encuentran girados con respecto a otros ejes, llamados principales, y que permiten caracterizar a la lámina de material compuesto como un material simplemente ortótropo. Una versión de estas relaciones está recogida en las expresiones (3-12) donde se explicita la relación entre las constantes mecánicas expresadas en los ejes geométricos de aplicación de la carga y las constantes expresadas en los ejes de ortotropía cuando entre éstos hay una relación de giro alrededor del eje 'z'.

Estas relaciones permiten establecer un comportamiento de aparente anisotropía cuando los ejes en los que se expresan las constantes mecánicas no son los principales de ortotropía de la lámina. Adicionalmente dichas relaciones representan cotas máximas y mínimas a las constantes elásticas del material cuando las fibras aparecen giradas con respecto a los ejes de aplicación de la carga. Una descripción pormenorizada de estos aspectos puede encontrarse en [1]. A continuación, en la Figura 5-1 se muestra la variación de las constantes mecánicas cuando se varía el ángulo de inclinación de las fibras para dos láminas de fibra de vidrio-epoxy y de boro-epoxy respectivamente:



**Figura 5-1. Variación de las constantes mecánicas para compuestos de fibra de vidrio-epoxy (izquierda) y de boro-epoxy (derecha) [1].**

En general, como se muestra en la Figura 5-1 los valores máximos de las constantes no se encuentran cuando los ejes de aplicación de la carga coinciden con los ejes de ortotropía de la lámina ( $\theta = 0$ ). Este aspecto muestra que en función del comportamiento mecánico que se quiera optimizar y de las constantes que se quieran maximizar convendrá orientar las fibras según direcciones diferentes.

A pesar de esta riqueza de comportamiento, este tipo de planteamientos deja de ser útil cuando se quiere diseñar más allá del límite elástico del material o cuando se quiere tratar con conjuntos de láminas que conformen un único laminado. En este sentido, hablar del límite elástico del material compuesto carece de un verdadero sentido físico ya que son realmente cada uno de los límites elásticos de los materiales constituyentes, los que determinan el final del rango elástico del material y el inicio del comportamiento no lineal, el fallo y en última instancia la rotura. Además, el material compuesto presentará un comportamiento global que es el resultado de la actuación degradada combinada de fibra y matriz.

En este sentido, existen fundamentalmente dos herramientas para tratar con estructuras constituidas por laminados de material compuesto. La primera de estas herramientas es el Método de los Elementos Finitos que permite resolver las ecuaciones de los medios continuos mediante una discretización adecuada del dominio. Este método ha sido descrito en profundidad en el capítulo anterior y también puede encontrarse expuesto en [2], [3] o [4].

La segunda herramienta constituye una aproximación numérica que permite tratar laminados de material compuesto, bajo hipótesis de tensión plana, y parte de las hipótesis generales de placas delgadas. Esta herramienta es la llamada teoría general de laminado cuya descripción puede encontrarse en [5] o en [6] y cuyas limitaciones han sido superadas con el desarrollo hecho en el tercer capítulo de este trabajo.

Como se ha dicho, la dificultad principal en el análisis de este tipo de laminados estriba en cómo, a partir de las propiedades de fibra y matriz, obtener las propiedades de los laminados de material compuesto. Uno de los primeros intentos, en este sentido, que se tienen es la



llamada *regla de mezclas* cuya descripción se puede encontrar en [7]. Esta teoría permite obtener constantes mecánicas para el material compuesto a partir de las propiedades mecánicas de los materiales constituyentes asumiendo que la participación a los estados de tensión y deformación de dichos constituyentes se hace según sus coeficientes de participación volumétrica.

Por otro lado, el límite de comportamiento lineal y la rotura se han determinado tradicionalmente mediante reglas que permiten comparar los estados de carga (multiaxiales en general) con un estado admisible límite. Cuando estos criterios se verifican, se considera que el material sale de su comportamiento lineal y falla. En cuanto a la salida del periodo lineal estos criterios son muy similares a los criterios de plastificación para materiales isótropos. Sin embargo, los mecanismos de rotura en el caso de materiales compuestos presentan un carácter mucho más complejo que en el caso de materiales isótropos debido a la participación combinada de sus constituyentes, tal y como se ha indicado.

Algunos de los criterios de resistencia para laminados más utilizados son el criterio de la máxima tensión, el criterio de la máxima deformación, el criterio de Tsai-Hill [8] y el criterio de Tsai-Wu. Una descripción de estos criterios puede encontrarse en [9] o en [10]. Dichos criterios están formulados en función de las tensiones principales por lo que requieren transformar el estado tensional según unos ejes principales de ortotropía.

Sin embargo, los criterios de fallo que se acaban de citar utilizan las componentes de tensión del material compuesto y no tienen en cuenta los diferentes mecanismos de fallo a partir de la consideración de fibra y matriz por separado. Ejemplos de criterios de fallo que tengan en cuenta las diferentes formas de fallar de fibra y matriz pueden ser los criterios de Hashin [11] y el criterio de Puck [12]. El primero de ellos separa entre cuatro modos de fallo. Dos modos para la fibra y matriz, ambas sometidas a otros dos modos de fallo a tracción y compresión. El segundo de ellos se caracteriza por establecer el criterio de fallo para la matriz evaluando las componentes de tensión contenidas precisamente en el plano de fallo y que determinarán la orientación de dicho plano. Una recopilación de estos criterios de fallo y otros puede encontrarse en [13].

Desgraciadamente las consideraciones que se han hecho hasta ahora no son aplicables para el diseño de estructuras que se encuentren sometidas a solicitaciones que produzcan estados más allá de los rangos elásticos de los materiales constituyentes. Para acometer esta tarea se hace necesario técnicas de simulación numérica que permitan interconectar numéricamente la degradación microscópica de la fibra y de la matriz que compondrán el estado global macroscópico de la estructura.

En esta línea, *la teoría de homogeneización* trata el problema estructural en dos escalas de percepción dentro de un esquema dual de elementos finitos. La primera de ellas es la escala macroscópica o global y permite determinar el estado tensional de la estructura equilibrando las fuerzas y discretizando ésta en una serie de volúmenes elementales representativos. La segunda de estas escalas se considera dentro de cada uno de estos volúmenes representativos y permite obtener una homogeneización de las propiedades del material compuesto a partir de las propiedades de la fibra y la matriz y de un modelo micromecánico apropiado. Esta homogeneización una vez culminada se traslada a la estructura global a través de las propiedades ya obtenidas para el compuesto.

De esta manera, para cada punto de integración del problema global habrá que resolver un problema de valores de contorno en el microdominio que cambia con los niveles de deformación que se van alcanzando a escala macroscópica. Cuando los dos problemas cumplen con las condiciones de equilibrio se considera que se ha alcanzado la convergencia. Un esquema del proceso se muestra en la Figura 5-2:

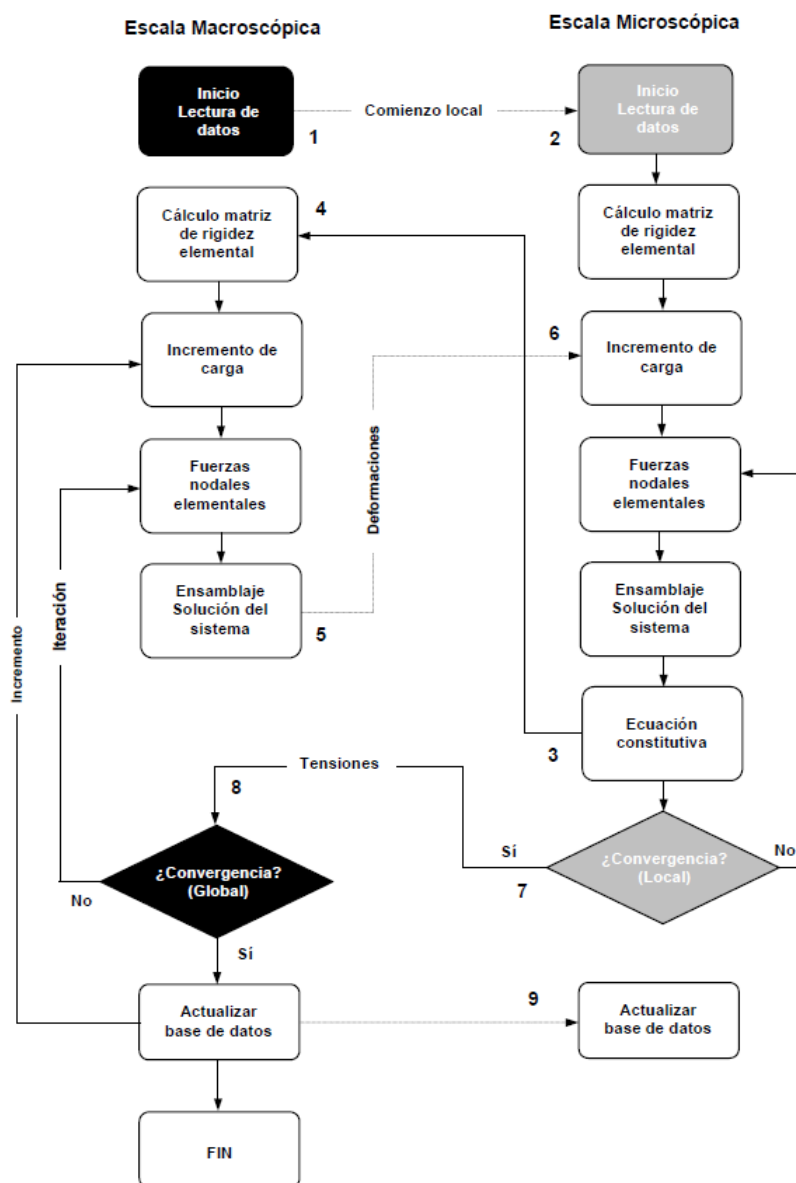


Figura 5-2. Esquema del método de homogeneización [14]

La principal desventaja de la teoría de homogenización la constituye su elevado coste computacional provocado por la necesidad de tener que acometer tareas de cálculo en los dos niveles que se han descrito. Una descripción más precisa puede encontrarse en [14] y [15].

Tanto los modelos de daño como los de plasticidad, y al igual que los modelos de fallo que se han descrito, consideran que mientras que el estado tensional del sólido comparado con uno de referencia no supere un determinado umbral, el material compuesto seguirá comportándose según el tramo lineal elástico. Cuando estos umbrales se sobrepasan, comienza el proceso de degradación que volverá el problema no lineal. Las funciones que permiten comparar el estado tensional con el estado de referencia reciben el nombre de *funciones de fluencia*. Sin embargo, los estados de referencia de las funciones de fluencia clásicas están definidos sobre materiales isótropos. Por lo tanto, el tratamiento del comportamiento no lineal de materiales anisótropos (o particularmente ortótropos) como es el caso de materiales compuestos conformados a partir de dos fases diferentes, requiere el manejo de funciones de fluencia anisótropas. Aunque a lo largo del tiempo diversos autores han desarrollado teorías en esta línea, las funciones de fluencia que de ellas se desprenden resultan a menudo muy costosas de manejar computacionalmente.

En ese sentido, la *teoría de la anisotropía mediante mapeos de espacio* [16] permite reducir los estados tensionales y de deformación, en el caso de un material anisótropo, a los estados que se tendrían en un espacio en el que el material fuera isótropo. De esta manera, en este espacio ficticio se podrán usar criterios de degradación para materiales isótropos y aprovechar su simpleza a la hora de implementarlos computacionalmente. Las transformaciones que se proponen en esta teoría y que serán lineales de los estados de tensión y de deformación se realizar a partir de dos tensores de cuarto orden que contienen la información de anisotropía del material. Un esquema del mapeo de espacios se muestra en la Figura 5-3:

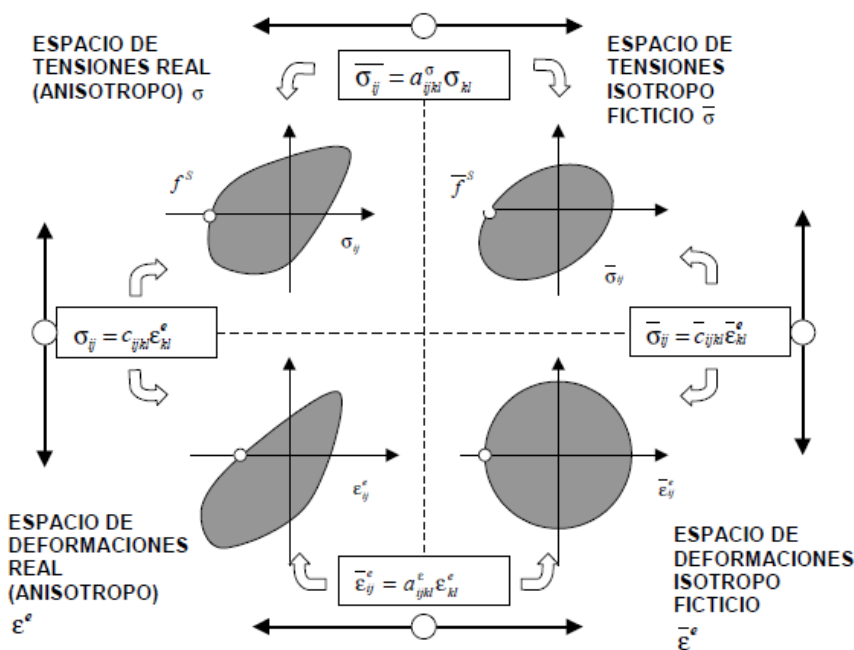


Figura 5-3. Esquema de la transformación de tensiones y deformaciones del espacio real al ficticio [16]

Otra alternativa para explorar la evolución anisótropa de los materiales compuestos, más allá de su límite elástico, la constituye la llamada *teoría de mezclas*. Esta opción es la que se utiliza en este trabajo y permite concebir el comportamiento mecánico del material compuesto, a partir de la actuación mecánica de sus componentes y según su participación volumétrica.

Además, esta teoría que no hace ninguna consideración sobre la interacción micromecánica de los constituyentes, permite relacionar materiales que se modelen con leyes constitutivas diferentes entre sí, haciendo válidos los modelos de degradación que se utilizan cuando dichos componentes se analizan por separado.

Como ya se ha comentado, la primera versión de esta teoría puede encontrarse en [7] y se basa en que la participación de cada componente a la caracterización mecánica del material compuesto será determinada por la fracción volumétrica de cada uno de dichos componentes. Esta fracción volumétrica  $k_i$  se define:

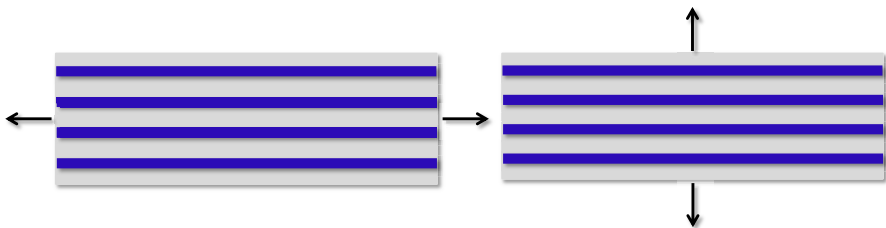
$$k_i = \frac{V_i}{V}; \quad i = f, m \quad (5-1)$$

En la expresión anterior,  $V_i$  y  $V$  representan respectivamente el volumen del componente  $i$  y el volumen total del compuesto. Un desglose de las hipótesis que asume la teoría de mezclas puede encontrarse en [17]. Dichas hipótesis son las siguientes:

- En cada volumen infinitesimal representativo interactúan un número finito de sustancias constituyentes las cuales participan según una cuantía proporcional a su fracción volumétrica. Se considera que, dentro de un volumen representativo, el volumen ocupado por cada componente es mucho menor que el volumen ocupado por todo el compuesto.
- Se considera que la distribución de cada una de las sustancias componentes se distribuye en un punto material de forma homogénea y cada una de ellas participa según su propia ley constitutiva pudiendo combinar diferentes comportamientos entre las sustancias componentes.
- Se considera que las deformaciones de cada una de las sustancias componentes son iguales entre ellas e iguales a la deformación del compuesto. Esta condición de *isodeformación o comportamiento en paralelo* es lo que se conoce como *ecuación de cierre o compatibilidad*.

La última de estas hipótesis establece un juego de condiciones que permite cerrar el sistema de ecuaciones y determinar el valor de las tensiones y deformaciones de fibra y matriz. Evidentemente estas ecuaciones de cierre no son las únicas que se pueden proponer. Por ejemplo, la consideración de una condición de *isotensión o comportamiento en serie* que permitirá asumir que las tensiones de todas las sustancias componentes serán iguales entre sí e iguales a las tensiones del compuesto, establece otra ecuación de cierre válida. Esta última consideración establece la llamada *teoría de mezclas inversa* cuyas hipótesis son iguales a las que se acaban de describir para la teoría de mezclas salvo por la condición de isotensión.

Tradicionalmente se ha considerado que dentro de un laminado de material compuesto en la dirección de la fibra se producen comportamientos en paralelo mientras que en las direcciones perpendiculares se tienen comportamientos en serie [18].



**Figura 5-4.** Esquema de comportamientos paralelo y serie de un laminado bajo una acción. Comportamiento paralelo (figura izquierda) y comportamiento serie (figura derecha)

Sin embargo, la experiencia muestra que, salvo algunos casos muy concretos, los comportamientos puros en paralelo o en serie no son apropiados para modelar laminados de material compuesto. Esto es debido a que normalmente suelen comportarse según esquemas mixtos que requieren consideraciones diferentes para cada una de las componentes de tensión y deformación en función de la dirección con respecto a la cual se encuentra alojada la fibra.

En este sentido, la teoría de mezclas ha sufrido diversas modificaciones que han permitido enriquecerla y considerar estados que no representen comportamientos en paralelo o en serie puros sino estados intermedios. Un primer intento de formular estas leyes intermedias puede encontrarse en [17], [19], y [20]. En esta reformulación se considera que la deformación del compuesto es igual a la suma ponderada, por un factor  $\mathbb{H}$ , de las partes paralelo y serie de las deformaciones:

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \mathbb{H})\varepsilon_{ij}^{par} + \mathbb{H}\varepsilon_{ij}^{ser} \quad (5-2)$$

Donde  $0 \leq \mathbb{H} \leq 1$ ,  $\varepsilon_{ij}$  representa la deformación del compuesto,  $\varepsilon_{ij}^{par}$  y  $\varepsilon_{ij}^{ser}$  representan respectivamente las partes paralelo y serie de las deformaciones de dicho compuesto. Gracias a estas consideraciones, se podrá tratar a cada una de las diversas componentes de deformación trabajando en paralelo o serie. Las deformaciones  $\varepsilon_{ij}^{par}$  y  $\varepsilon_{ij}^{ser}$  se calculan según:

$$\varepsilon_{ij}^{par} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij}^{ser} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ij}^k \quad (5-3)$$

En las expresiones (5-2) y (5-3) se considera que el material compuesto está constituido por  $n$  sustancias componentes. El parámetro  $\mathbb{H}$  debe determinarse experimentalmente y constituye la principal desventaja de este método que necesitará una campaña de ensayos para calibrar el modelo antes de poder utilizarlo apropiadamente.

Otra línea de teorías de mezclas modificadas ha sido propuesta por [3] y [21]. En este caso, se propone una formulación que permite modelar el comportamiento no lineal de láminas reforzadas con fibras unidireccionales. Además, permite la consideración de leyes constitutivas que comporten daño y/o plasticidad de los componentes. El esquema de resolución para obtener los campos de tensiones y deformación de la fibra y de la matriz que propone esta teoría puede ser incluida en un esquema de elementos finitos como el que se describió en el capítulo anterior. Por este motivo, será esta vertiente de teorías de mezclas la que se utilice en este trabajo y se considera oportuno además hacer las siguientes aclaraciones:

- Esta modificación de la teoría de mezclas permite seleccionar qué componentes de la deformación y tensión tienen un comportamiento en serie y cuáles tendrán un comportamiento en paralelo. Esta característica nos proporciona una herramienta para modelar la anisotropía inherente al material compuesto, considerando

comportamiento en paralelo para las deformaciones en la dirección de la fibra y comportamiento en serie en las direcciones perpendiculares.

- Esta vertiente permite la composición de materiales con cualquier modelo constitutivo no lineal. Dado que la anisotropía se modela según el punto anterior, los materiales constituyentes podrán considerarse isótropos pudiendo aprovechar la sencillez de los modelos de daño y/o plasticidad de los mismos.
- La naturaleza nominativa de las variables de interés es estadística. En este sentido, se define un elemento de *volumen representativo periódico* con simetría transversalmente isótropa. En este volumen, se definen unos promedios lineales volumétricos para los campos de deformaciones. Estos promedios se asimilarán en la teoría que se describirá a continuación a las deformaciones que se manejen.
- Se supondrá que el material compuesto es una composición de dos fases llamadas fibra y matriz. Las fracciones volumétricas cumplirán evidentemente que  $k_f + k_m = 1$ . La descripción que proporciona esta teoría se realiza mediante una formulación en deformaciones. Se considera que el estado actual de la matriz y la fibra está completamente determinado por su deformación y un conjunto de variables internas que serán las variables independientes. La tensión que se obtendrá mediante la ley de comportamiento será considerada como la variable dependiente del problema.

En el siguiente apartado, se describirá la teoría de mezclas modificada que se acaba de esbozar.

## 5.2. Descripción del modelo Básico Serie/Paralelo

Los elementos que se mostrarán en este apartado tratarán de describir la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo expuesta en [22]. Dichos elementos no pretenden ser una réplica de los expuestos en la referencia que se aporta sino una descripción autocontenida y exclusiva de los aspectos que se utilizarán en los planteamientos de la presente tesis doctoral.

Si bien la versión de la teoría que se esboza a continuación es el modelo *básico serie/paralelo*, el autor, en la misma referencia, describe una teoría adicional que constituye una versión enriquecida de la primera. En el presente trabajo, se utilizará el modelo básico especificando cuáles son las consideraciones que hay que hacer para disponer de dicho modelo en contraposición con la versión enriquecida del mismo.

### Descripción general y variables utilizadas

En primer lugar y tal y como ya se ha apuntado, el planteamiento que se hace para las magnitudes de deformación y tensión es una definición en sentido estadístico. Los elementos de volumen contenidos en el sólido contendrán puntos que o bien pertenecen a la matriz o bien pertenecen a la fibra ( $V^c = V^f \cup V^m$ )<sup>1</sup>. De esta manera, se asumirá que las fracciones volumétricas de fibra y matriz sumarán la unidad. El *promedio lineal volumétrico* de deformación y tensión para el compuesto, la fibra y la matriz se define:

$$\overline{\varepsilon}_{ij}^k = \frac{\int_{V_k} \varepsilon_{ij} dV}{\int_{V_k} dV}; \quad \overline{\sigma}_{ij}^k = \frac{\int_{V_k} \sigma_{ij} dV}{\int_{V_k} dV}; \quad k = c, f, m \quad (5-4)$$

La relación entre los tensores promedios de deformación y tensión del compuesto en función de los tensores de deformación y tensión de las componentes estará dada por la regla de mezclas habitual:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon}_{ij}^c &= k_f \overline{\varepsilon}_{ij}^f + k_m \overline{\varepsilon}_{ij}^m \\ \overline{\sigma}_{ij}^c &= k_f \overline{\sigma}_{ij}^f + k_m \overline{\sigma}_{ij}^m \end{aligned} \quad (5-5)$$

Sin embargo, la necesidad de manejar, desde un punto de vista práctico, magnitudes absolutas y no promedios estadísticos hace necesario en algún momento, establecer una relación entre los promedios estadísticos definidos en (5-4) y las tensiones y deformaciones absolutas. Esta relación es la que permite definir si manejaremos la versión básica de la teoría serie/paralelo o su versión enriquecida. En el caso de la versión básica, se hace la siguiente asimilación:

<sup>1</sup> Los índices  $c$ ,  $f$  y  $m$  hacen referencia respectivamente al compuesto, fibra y matriz.



$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^k &= \overline{\varepsilon_{ij}^k}, \\ \sigma_{ij}^k &= \overline{\sigma_{ij}^k},\end{aligned}\quad k = c, f, m \quad (5-6)$$

Por otro lado, el *modelo enriquecido serie-paralelo* establece que las variables a manejar serán *promedios cuadráticos volumétricos* de las variables de interés. La mejora que aporta esta versión enriquecida se puede sintetizar diciendo que para las deformaciones que se comporten en paralelo los promedios cuadráticos serán iguales a los promedios lineales y, por tanto, se podrán hacer las consideraciones mostradas en (5-6) mientras que para las deformaciones que se comporten en serie los promedios cuadráticos deberán calcularse a partir de los promedios lineales, asumiendo una relación lineal entre ambos.

La versión enriquecida que no se describirá aquí tiene, entre otras ventajas, la capacidad de corregir la subestimación de la rigidez en direcciones perpendiculares a la fibra que se comete cuando se asume isotensión en dichas direcciones. Otra ventaja que tiene el modelo enriquecido es que su formulación es idéntica a la de la versión básica que se describirá a continuación, siendo únicamente necesario definir cambios de variables apropiados. Una descripción detallada del modelo enriquecido y de los cambios de variables pertinentes puede encontrarse en [23].

La relación entre los promedios cuadráticos y los lineales debe determinarse mediante ensayos experimentales sobre el material que se quiera modelar. El hecho de no disponer de estos coeficientes obliga a utilizar la versión básica que como se mostrará posteriormente, será suficiente para los propósitos de este trabajo.

Para la descripción constitutiva de los materiales constituyentes bastará con una ley de comportamiento para cada uno de ellos, y con un tensor constitutivo tangente. Asimismo, será necesario por cada variable interna, una ley que provea su evolución y que vendrá dada por el modelo de daño o plasticidad que se quiera considerar.

Es interesante especificar que se pueden tratar tantas variables internas como se quiera, siempre que se tenga para cada una de ellas, una ley de evolución o modelo de degradación. Conviene señalar también que las variables internas pueden representar desde multiplicadores plásticos en un modelo de plasticidad, a parámetros de daño o tensores de rigidez degradados. Para fijar ideas y en función del modelo de daño que se considerará después, un conjunto de variables internas de fibra y matriz podría ser el compuesto por un parámetro de daño y tensores de rigidez tangentes degradados:

$$\begin{aligned}d\sigma^k &= C(d^k)d\varepsilon^k \\ d^k &= d^k\{d\varepsilon^k\};\end{aligned}\quad k = f, m \quad (5-7)$$

Las relaciones que traducen *la ley de mezclas* se obtienen de sustituir las relaciones (5-6) en (5-5):

$$\begin{aligned}d\varepsilon_{ij}^c &= k_f d\varepsilon_{ij}^f + k_m d\varepsilon_{ij}^m \\ d\sigma_{ij}^c &= k_f d\sigma_{ij}^f + k_m d\sigma_{ij}^m\end{aligned}\quad (5-8)$$

Haciendo un conteo de variables se tendrían ocho grupos, que son, a saber, las deformaciones y tensiones de fibra, matriz y compuesto y las variables internas de fibra y matriz. Por otro lado, el conjunto de ecuaciones formuladas serían las mostradas en (5-7) y (5-8) que constituyen seis conjuntos de ecuaciones. Debido a esto se necesitarían dos conjuntos adicionales de ecuaciones para poder cerrar el sistema. Estos dos conjuntos de ecuaciones constituyen las ecuaciones de cierre que caracterizan el modelo que se está describiendo.

Las ecuaciones de cierre, en este modelo, se caracterizan por considerar comportamiento en paralelo o igualdad de deformaciones para unas determinadas direcciones de la deformación y adicionalmente considerar comportamiento en serie o igualdad de tensiones para el resto de las direcciones. Por tanto, para establecer las ecuaciones de cierre, se hace necesario dividir el sistema en sus partes serie y paralelo. Este proceso se describirá en el siguiente apartado.

### División de los tensores de deformación, tensión y ley de comportamiento en sus componentes serie y paralelo

En este apartado, se describe el procedimiento operativo necesario que permitirá dividir las componentes de tensión y deformación en sus partes serie y paralelo. Suponiendo que las componentes de deformación y tensión están dadas por la notación de Voigt, se partirá de un vector de deformaciones  $\varepsilon$  ordenado<sup>2</sup> según la disposición habitual. Se asumirá que, de las seis componentes de los vectores, habrá  $n_{par}$  de estas componentes que tendrán comportamiento en paralelo. Dicho vector habrá de ser ordenado de manera que tenga en sus primeras entradas las componentes que se comportarán en paralelo y, a continuación, aquellas componentes que se comportarán en serie. Partiendo así del vector de deformaciones original  $\varepsilon$ , tras el reordenamiento, se obtendrá el vector  $\varepsilon'$ :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon' = \begin{pmatrix} \text{componentes en paralelo} \\ \text{componentes en serie} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_p \\ \varepsilon_s \end{pmatrix} \quad (5-9)$$

Para reordenar las componentes de deformación se utilizarán matrices apropiadas de reordenamiento. De esta manera, bastará por premultiplicar el vector original por una matriz  $6 \times 6$  que llamaremos  $P$  y que transforme la componente  $j$  del vector  $\varepsilon$  original en la componente  $i$  del nuevo vector  $\varepsilon'$ . Para ello. La fila  $i$ -ésima de dicha matriz tendrá todas sus columnas nulas salvo la  $j$ -ésima que contendrá un uno. Así, se tendrá que:

<sup>2</sup> A partir de ahora y aunque se mencione sólo al vector de deformaciones, las consideraciones que se hagan serán extensibles al vector de tensiones.

$$\varepsilon' = P\varepsilon \quad (5-10)$$

Dado que se pretende reordenar el vector de deformaciones para colocar en primer lugar las  $n_{par}$  componentes de deformación que se comportarán en paralelo y, en segundo lugar, las  $(6 - n_{par})$  que se comportarán en serie, se descompone el operador  $P$  como suma de dos operadores  $P_p$  y  $P_s$ . El primero de ellos contendrá, en sus primeras filas, las primeras  $n_{par}$  filas de  $P$  mientras que las  $(6 - n_{par})$  filas restantes contendrán ceros en todas sus columnas. Complementariamente, el operador  $P_s$  contendrá en sus últimas filas, las últimas  $(6 - n_{par})$  filas de  $P$ , teniendo elementos nulos en sus  $n_{par}$  primeras filas. Dado todo lo anterior<sup>3</sup>, se tendrá que:

$$P = P_p + P_s \quad (5-11)$$

Y, sustituyendo (5-11) en (5-10), se tendrá que:

$$\varepsilon' = P_p \cdot \varepsilon + P_s \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_p(n_{par} \times 1) \\ \varepsilon_s((6 - n_{par}) \times 1) \end{pmatrix} \quad (5-12)$$

Las dimensiones de los elementos de  $\varepsilon'$  que son  $\varepsilon_p$  y  $\varepsilon_s$  están incluidas entre paréntesis. Dada la forma de la suma descrita en (5-12), es conveniente hacer las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{par} &= P_p \cdot \varepsilon \\ \varepsilon_{serie} &= P_s \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (5-13)$$

Evidentemente y dadas las definiciones que se han hecho, las primeras  $n_{par}$  componentes de  $\varepsilon_{par}$  serán las componentes de deformación que se comportarán en paralelo mientras que el resto de sus entradas serán nulas. De forma complementaria, las  $(6 - n_{par})$  últimas componentes de  $\varepsilon_{serie}$  serán las componentes que se comportarán en serie mientras que el resto de ellas serán nulas. Así, se tendrá, sustituyendo (5-13) en (5-12) que las deformaciones totales serán la suma de aquellas que se comportarán en paralelo más aquellas que se comportarán en serie:

$$\varepsilon' = \varepsilon_{par} + \varepsilon_{serie} \quad (5-14)$$

A modo de ejemplo, imaginemos que el vector original  $\varepsilon$  se quiere ordenar de manera que tenga, en primer lugar, las componentes en paralelo  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_z$  ( $n_{par} = 2$ ), seguidas del resto de componentes que se comportarán en serie, dando lugar a  $\varepsilon'$ . Es decir:

<sup>3</sup> Dado que el tensor  $P$  está representado por una matriz ortogonal, debe notarse que  $P^{-1} = P^T$ .

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

En este caso, las matrices  $P_p$  y  $P_s$  habrán de tomar la forma:

$$P_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera que:

$$\varepsilon_{par} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{serie} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{par} + \varepsilon_{serie} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \varepsilon'$$

Todas las consideraciones que se han hecho son directamente extrapolables al vector de tensiones. Es importante exponer también que este reordenamiento implica necesariamente un reordenamiento de los elementos del tensor tangente constitutivo  $C$  que se escribía, según la disposición original (5-7):

$$d\sigma = C d\varepsilon = \begin{pmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{xz} \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{xz} \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (5-15)$$

Que también se puede escribir invirtiendo (5-12):

$$(P_p + P_s)^{-1} d\sigma' = C (P_p + P_s)^{-1} d\varepsilon' \quad (5-16)$$

A su vez, despejando el miembro izquierdo y utilizando que  $(P_p + P_s)^{-1} = (P_p + P_s)^T = P_p^T + P_s^T$ , la expresión (5-16) se puede escribir:

$$d\sigma' = (P_p + P_s) C (P_p^T + P_s^T) d\varepsilon' \quad (5-17)$$

Reordenando los términos:

$$d\sigma' = (P_p C P_p^T + P_p C P_s^T + P_s C P_p^T + P_s C P_s^T) d\varepsilon' \quad (5-18)$$

Lo que permite obtener la ley comportamiento reordenada  $C'$  a partir de la ley de comportamiento original  $C$ :

$$C' = (P_p C P_p^T + P_p C P_s^T + P_s C P_p^T + P_s C P_s^T) = \begin{pmatrix} C_{pp}(n_{par} \times n_{par}) & C_{ps}(n_{par} \times (6 - n_{par})) \\ C_{sp}((6 - n_{par}) \times n_{par}) & C_{ss}((6 - n_{par}) \times (6 - n_{par})) \end{pmatrix} \quad (5-19)$$

En (5-19) se ha escrito  $C'$  por bloques en los cuales se han especificado las dimensiones. Dichos bloques servirán para describir el procedimiento en los apartados siguientes. Siguiendo con el ejemplo que se había propuesto se tendría para estos bloques:

$$C_{pp} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{pmatrix} \quad C_{ps} = \begin{pmatrix} C_{12} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{32} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \end{pmatrix}$$

$$C_{sp} = \begin{pmatrix} C_{21} & C_{23} \\ C_{41} & C_{43} \\ C_{51} & C_{53} \\ C_{61} & C_{63} \end{pmatrix} \quad C_{ss} = \begin{pmatrix} C_{22} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{42} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{52} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{62} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}$$

De esta manera, se puede escribir la ley de comportamiento reordenada para la fibra y la matriz y según la disposición de componentes en paralelo y serie que se ha expuesto:

$$d\sigma'_k = C'_k d\varepsilon'_k = \begin{pmatrix} d\sigma_p \\ d\sigma_s \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} C_{pp}^k & C_{ps}^k \\ C_{sp}^k & C_{ss}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_s \end{pmatrix}_k ; \quad k = f, m \quad (5-20)$$

## Ecuaciones de cierre

Como se comentó en un apartado anterior, para cerrar el sistema de ecuaciones dado por (5-7) y (5-8) se hace necesario añadir dos grupos adicionales de ecuaciones. Estas ecuaciones se construirán sobre la separación en componentes, paralelo y serie, descrita en el apartado anterior. Las ecuaciones de cierre que se expondrán en este apartado sustituyen la presencia de relaciones micromecánicas propias de un modelo de homogenización y que no se consideran dentro de las hipótesis de las que parte la teoría de mezclas.

De esta manera, la principal asunción de dicha teoría consiste en suponer igualdad de deformaciones para la fibra y matriz en las direcciones donde se considere comportamiento en paralelo e igualdad de tensiones para aquellas direcciones donde se considere comportamiento en serie. Lo anterior se puede sintetizar en:

$$\begin{aligned} (d\varepsilon_p)_f &= (d\varepsilon_p)_m \\ (d\sigma_s)_f &= (d\sigma_s)_m \end{aligned} \quad (5-21)$$

Las ecuaciones expuestas en (5-21) representan el conjunto más sencillo que se puede proponer para cerrar el sistema de ecuaciones y representar el estado tensional de un material compuesto usando la teoría de mezclas. Estas suposiciones fueron utilizadas, por primera vez, para definir un modelo de plasticidad para materiales anisótropos [24]. Posteriormente, estas mismas consideraciones han sido utilizadas para modelar el comportamiento mecánico de laminados y estructuras de material compuesto [21], [25] y más recientemente para modelar la delaminación en materiales compuestos [26].

## Método de resolución del modelo Básico Serie/Paralelo

El problema que se pretende resolver queda formulado, como se ha visto, a partir de las expresiones (5-7), (5-8) y (5-21) donde se considera que las leyes de comportamiento de la

fibra y la matriz se encuentran separadas en sus componentes serie y paralelo según se expuso en (5-20). La implementación adecuada de este método va a permitir obtener el estado tensional de una estructura de material compuesto, sometido a unas condiciones de contorno determinadas, utilizando los modelos de degradación de la fibra y de la matriz por separado. Además, garantiza que las relaciones entre las variables elásticas de fibra y matriz se relacionen con las del material compuesto a través de las relaciones que se han expuesto también en los apartados anteriores.

El método de resolución que permita resolver dichas relaciones debe ser integrado en un soporte de elementos finitos como el descrito en el capítulo anterior. En dicho soporte, se obtenían las deformaciones del compuesto usando el Método de Newton-Raphson que garantizaba, en cada instante de tiempo  $t$ , el equilibrio de las fuerzas internas y las fuerzas externas. De esta manera, el procedimiento que se proponga deberá ser ejecutado en cada iteración hacia el equilibrio y en cada instante  $t + \Delta t$ .

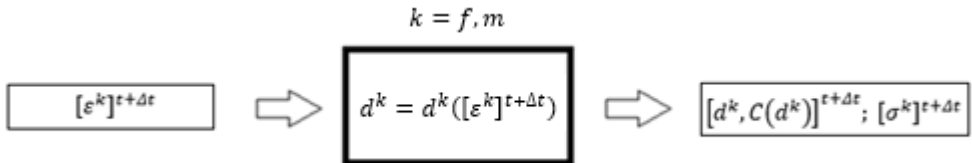
Para ello, en cada iteración, habrá que despejar a partir de las deformaciones del compuesto en el instante  $t + \Delta t$  y las deformaciones de fibra y matriz en el instante  $t$ , el conjunto de variables dependientes y variables internas en el instante  $t + \Delta t$ . El conjunto de variables conocidas de las que se parte es:

$$[d\varepsilon^c]^{t+\Delta t}, [d\varepsilon^f]^t, [d\varepsilon^m]^t \quad (5-22)$$

Mientras que las variables que se quieren calcular en cada paso del método y que constituyen las incógnitas del problema en cada paso de iteración son:

$$[d\sigma^c]^{t+\Delta t}, [d\sigma^f]^{t+\Delta t}, [d\sigma^m]^{t+\Delta t}, [d\varepsilon^f]^{t+\Delta t}, [d\varepsilon^m]^{t+\Delta t}, [d^f]^{t+\Delta t}, [d^m]^{t+\Delta t} \quad (5-23)$$

Para obtener las variables dadas en (5-23), será necesario contar con los modelos de degradación de fibra y matriz que permitirán obtener las tensiones, los tensores tangentes degradados y los parámetros de daño actualizados. Este hecho se recoge en la siguiente figura:



**Figura 5-5. Diagrama de flujo de variables de entrada y salida de los modelos de degradación de fibra y matriz**

Adicionalmente, deben tenerse en consideración un par de aspectos. En primer lugar, para calcular la matriz de rigidez global de la estructura que permitirá ejecutar el Método de los Elementos Finitos, se hace necesario disponer de una manera de obtener el tensor de rigidez tangente del compuesto a partir de los tensores tangentes de fibra y matriz. Por otro lado, debe considerarse algún método iterativo que permita obtener las deformaciones serie y paralelo de fibra y matriz a partir de las deformaciones del compuesto consideradas en (5-22).

En los siguientes dos apartados se exponen respectivamente:

- Las expresiones que permiten obtener el tensor tangente constitutivo del material compuesto a partir de la descomposición de las partes serie y paralelo de los tensores constitutivos de la fibra y la matriz.
- El método iterativo que se utilizará para obtener las componentes serie y paralelo de las deformaciones y tensiones de la fibra y matriz que verifiquen las ecuaciones de cierre explicitadas en (5-21).

### Tensor tangente constitutivo del material compuesto

Para obtener este tensor será necesario partir de las expresiones que definen el problema que nos ocupa. Éstas son las leyes de comportamiento de fibra y matriz, escritas según la descomposición dada por (5-20), la regla de mezclas (5-8) y las ecuaciones de cierre (5-21):

$$\begin{aligned}
 (d\sigma_p)_f &= C_{pp}^f (d\varepsilon_p)_f + C_{ps}^f (d\varepsilon_s)_f \\
 (d\sigma_s)_f &= C_{sp}^f (d\varepsilon_p)_f + C_{ss}^f (d\varepsilon_s)_f \\
 (d\sigma_p)_m &= C_{pp}^m (d\varepsilon_p)_m + C_{ps}^m (d\varepsilon_s)_m \\
 (d\sigma_s)_m &= C_{sp}^m (d\varepsilon_p)_m + C_{ss}^m (d\varepsilon_s)_m \\
 (d\varepsilon_p)_c &= k_f (d\varepsilon_p)_f + k_m (d\varepsilon_p)_m \\
 (d\varepsilon_s)_c &= k_f (d\varepsilon_s)_f + k_m (d\varepsilon_s)_m \\
 (d\sigma_p)_c &= k_f (d\sigma_p)_f + k_m (d\sigma_p)_m \\
 (d\sigma_s)_c &= k_f (d\sigma_s)_f + k_m (d\sigma_s)_m \\
 (d\varepsilon_p)_f &= (d\varepsilon_p)_m \\
 (d\sigma_s)_f &= (d\sigma_s)_m
 \end{aligned} \tag{5-24}$$

Sustituyendo la novena expresión de (5-24) en la quinta y teniendo en cuenta que  $k_f + k_m = 1$ , se tiene que:

$$(d\varepsilon_p)_f = (d\varepsilon_p)_m = (d\varepsilon_p)_c \tag{5-25}$$



A continuación, a partir de la igualdad de tensiones de las partes serie de fibra y matriz expuestas en la décima, podremos igualar la segunda y la cuarta para tener:

$$C_{sp}^f(d\varepsilon_p)_f + C_{ss}^f(d\varepsilon_s)_f = C_{sp}^m(d\varepsilon_p)_m + C_{ss}^m(d\varepsilon_s)_m$$

De donde si utilizamos (5-25), podremos despejar las deformaciones serie de la fibra en función de las de la matriz:

$$C_{ss}^f(d\varepsilon_s)_f = (C_{sp}^m - C_{sp}^f)(d\varepsilon_p)_c + C_{ss}^m(d\varepsilon_s)_m \quad (5-26)$$

Por otro lado, multiplicando la sexta ecuación de (5-24) por  $C_{ss}^f$ , se tendrá:

$$C_{ss}^f(d\varepsilon_s)_c = k_f C_{ss}^f(d\varepsilon_s)_f + k_m C_{ss}^f(d\varepsilon_s)_m \quad (5-27)$$

A continuación despejando de (5-27) el factor  $k_f C_{ss}^f(d\varepsilon_s)_f$  y sustituyendo en (5-26) se tendrá que:

$$C_{ss}^f(d\varepsilon_s)_c + k_f(C_{sp}^f - C_{sp}^m)(d\varepsilon_p)_c = (k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)(d\varepsilon_s)_m$$

La expresión anterior nos permite obtener  $(d\varepsilon_s)_m$  a partir de las deformaciones serie y paralelo del compuesto. Despejando:

$$(d\varepsilon_s)_m = (k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)^{-1} [C_{ss}^f(d\varepsilon_s)_c + k_f(C_{sp}^f - C_{sp}^m)(d\varepsilon_p)_c] \quad (5-28)$$

Análogamente, multiplicando la sexta ecuación de (5-24) por  $C_{ss}^m$ , se tendrá:

$$C_{ss}^m(d\varepsilon_s)_c = k_f C_{ss}^m(d\varepsilon_s)_f + k_m C_{ss}^m(d\varepsilon_s)_m \quad (5-29)$$

Despejando  $k_m C_{ss}^m(d\varepsilon_s)_m$  y sustituyendo en (5-26) se tiene que:

$$k_m C_{ss}^f(d\varepsilon_s)_f = k_m(C_{sp}^m - C_{sp}^f)(d\varepsilon_p)_c + C_{ss}^m(d\varepsilon_s)_c - k_f C_{ss}^m(d\varepsilon_s)_f$$

De donde, despejando  $(d\varepsilon_s)_f$ , se tendrá una expresión para las deformaciones serie de la fibra análoga a la (5-28) para la matriz:

$$(d\varepsilon_s)_f = (k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)^{-1} \left[ k_m (C_{sp}^m - C_{sp}^f) (d\varepsilon_p)_c + C_{ss}^m (d\varepsilon_s)_c \right] \quad (5-30)$$

Sustituyendo la primera expresión y la tercera de (5-24) en la séptima, se tendrá para las tensiones del compuesto:

$$(d\sigma_p)_c = k_f (C_{pp}^f (d\varepsilon_p)_f + C_{ps}^f (d\varepsilon_s)_f) + k_m (C_{pp}^m (d\varepsilon_p)_m + C_{ps}^m (d\varepsilon_s)_m)$$

Y utilizando las expresiones (5-28) y (5-30) para despejar las partes serie de las deformaciones de la fibra y matriz y (5-25) para las partes en paralelo se tiene que:

$$\begin{aligned} (d\sigma_p)_c &= k_f (C_{pp}^f (d\varepsilon_p)_c \\ &+ C_{ps}^f ((k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)^{-1} [k_m (C_{sp}^m - C_{sp}^f) (d\varepsilon_p)_c + C_{ss}^m (d\varepsilon_s)_c])) \\ &+ k_m (C_{pp}^m (d\varepsilon_p)_c \\ &+ C_{ps}^m ((k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)^{-1} [C_{ss}^f (d\varepsilon_s)_c + k_f (C_{sp}^f - C_{sp}^m) (d\varepsilon_p)_c])) \end{aligned}$$

Que reordenando produce:

$$\begin{aligned} (d\sigma_p)_c &= (k_f C_{pp}^f + k_m C_{pp}^m \\ &+ k_f k_m (C_{ps}^f - C_{ps}^m) (k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)^{-1} (C_{sp}^m - C_{sp}^f)) (d\varepsilon_p)_c \\ &+ (k_f C_{ps}^f (k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)^{-1} C_{ss}^m \\ &+ k_m C_{ps}^m (k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)^{-1} C_{ss}^f) (d\varepsilon_s)_c \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo  $A = (k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)^{-1}$ , se puede reescribir lo anterior para obtener la parte paralelo de las tensiones del compuesto:

$$\begin{aligned} (d\sigma_p)_c &= (k_f C_{pp}^f + k_m C_{pp}^m + k_f k_m (C_{ps}^f - C_{ps}^m) A (C_{sp}^m - C_{sp}^f)) (d\varepsilon_p)_c \\ &+ (k_f C_{ps}^f A C_{ss}^m + k_m C_{ps}^m A C_{ss}^f) (d\varepsilon_s)_c \end{aligned} \quad (5-31)$$

Para despejar la parte serie de las tensiones del compuesto, en primer lugar, sustituyendo la décima de (5-24) en la octava, se tiene que:

$$(d\sigma_s)_f = (d\sigma_s)_m = (d\sigma_s)_c \quad (5-32)$$

A continuación, sustituyendo (5-25), (5-30) y (5-32) en la segunda de (5-24), se tiene para la parte serie de las tensiones del compuesto:

$$(d\sigma_s)_c = C_{sp}^f (d\varepsilon_p)_c + C_{ss}^f A \left[ k_m (C_{sp}^m - C_{sp}^f) (d\varepsilon_p)_c + C_{ss}^m (d\varepsilon_s)_c \right]$$

Que reorganizando:

$$(d\sigma_s)_c = \left( C_{sp}^f + k_m C_{ss}^f A (C_{sp}^m - C_{sp}^f) \right) (d\varepsilon_p)_c + C_{ss}^f A C_{ss}^m (d\varepsilon_s)_c \quad (5-33)$$

Análogamente, se podría haber sustituido (5-25), (5-28) y (5-32) en la cuarta de (5-24) para obtener:

$$(d\sigma_s)_c = C_{sp}^m (d\varepsilon_p)_c + C_{ss}^m A \left[ C_{ss}^f (d\varepsilon_s)_c + k_f (C_{sp}^f - C_{sp}^m) (d\varepsilon_p)_c \right]$$

Que reorganizando:

$$(d\sigma_s)_c = \left( C_{sp}^m + k_f C_{ss}^m A (C_{sp}^f - C_{sp}^m) \right) (d\varepsilon_p)_c + C_{ss}^m A C_{ss}^f (d\varepsilon_s)_c \quad (5-34)$$

Como puede observarse para pasar de la expresión (5-33) a (5-34) basta con intercambiar los índices  $f$  por los  $m$  y viceversa. Siguiendo la estrategia descrita en [22] para despejar las tensiones serie del compuesto a partir de una expresión invariante ante el cambio de índices, se puede, sumando (5-33) y (5-34) y dividiendo entre dos, obtener:

$$(d\sigma_s)_c = \frac{1}{2} \left( \left( C_{sp}^f + k_m C_{ss}^f A (C_{sp}^m - C_{sp}^f) \right) + \left( C_{sp}^m + k_f C_{ss}^m A (C_{sp}^f - C_{sp}^m) \right) \right) (d\varepsilon_p)_c \\ + \frac{1}{2} (C_{ss}^f A C_{ss}^m + C_{ss}^m A C_{ss}^f) (d\varepsilon_s)_c$$

Que, definiendo las matrices  $B$  y  $C$  y agrupando las componentes paralelo y serie, se tiene:

$$(d\sigma_s)_c = \frac{1}{2} B (d\varepsilon_p)_c + \frac{1}{2} D (d\varepsilon_s)_c \quad (5-35)$$

$$B = (C_{sp}^f + C_{sp}^m) + k_m C_{ss}^f A (C_{sp}^m - C_{sp}^f) + k_f C_{ss}^m A (C_{sp}^f - C_{sp}^m)$$

$$D = (C_{ss}^f A C_{ss}^m + C_{ss}^m A C_{ss}^f)$$

A su vez, esta expresión se puede reescribir utilizando la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}(C_{sp}^f + C_{sp}^m) &= A^{-1}A(C_{sp}^f + C_{sp}^m) = (k_m C_{ss}^f + k_f C_{ss}^m)A(C_{sp}^f + C_{sp}^m) \\ &= k_m C_{ss}^f A C_{sp}^f + k_m C_{ss}^f A C_{sp}^m + k_f C_{ss}^m A C_{sp}^f + k_f C_{ss}^m A C_{sp}^m\end{aligned}$$

De esta manera, sustituyendo lo anterior en (5-35), se tiene para  $B$ :

$$B = 2(k_m C_{ss}^f A C_{sp}^m + k_f C_{ss}^m A C_{sp}^f)$$

Y, finalmente, se tendrá para las tensiones serie del compuesto:

$$\begin{aligned}(d\sigma_s)_c &= (k_m C_{ss}^f A C_{sp}^m + k_f C_{ss}^m A C_{sp}^f)(d\varepsilon_p)_c \\ &\quad + \frac{1}{2}(C_{ss}^f A C_{ss}^m + C_{ss}^m A C_{ss}^f)(d\varepsilon_s)_c\end{aligned}\tag{5-36}$$

Recogiendo las expresiones (5-31) y (5-36) y asumiendo la existencia de una ley constitutiva tangente para el compuesto de la forma (5-20), se tendrá:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} d\sigma_p \\ d\sigma_s \end{pmatrix}_c &= \begin{pmatrix} C_{pp}^c & C_{ps}^c \\ C_{sp}^c & C_{ss}^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_p \\ d\varepsilon_s \end{pmatrix}_c \\ C_{pp}^c &= (k_f C_{pp}^f + k_m C_{pp}^m) + k_f k_m (C_{ps}^f - C_{ps}^m)A(C_{sp}^m - C_{sp}^f) \\ C_{ps}^c &= (k_f C_{ps}^f A C_{ss}^m + k_m C_{ps}^m A C_{ss}^f) \\ C_{sp}^c &= (k_m C_{ss}^f A C_{sp}^m + k_f C_{ss}^m A C_{sp}^f) \\ C_{ss}^c &= \frac{1}{2}(C_{ss}^f A C_{ss}^m + C_{ss}^m A C_{ss}^f)\end{aligned}\tag{5-37}$$

Analizando las expresiones que se han obtenido para el tensor constitutivo tangente, se observa que éste hereda las propiedades de simetría de los tensores constitutivos tangentes de la fibra y la matriz. A partir de (5-37), el tensor constitutivo tangente del compuesto permitirá obtener la matriz de rigidez global de la estructura dentro del modelo de elementos finitos.

## Método iterativo para obtener las componentes de las deformaciones de fibra y matriz

Para obtener las deformaciones y tensiones de la fibra y matriz en el instante siguiente mostradas en (5-23), partiendo de las deformaciones del compuesto en el instante actual se utilizará el Método de Newton-Raphson propuesto en [22].

La función de la que se quiere calcular el cero será el desequilibrio de las partes serie de las tensiones de fibra y matriz. El cumplimiento de dicha condición asegura el cumplimiento de la décima ecuación de (5-24). A saber:

$$\Delta\sigma_s = (d\sigma_s)_m - (d\sigma_s)_f \quad (5-38)$$

El método iterativo tratará de minimizar dicho residuo con respecto a una variable arbitraria que será  $(d\varepsilon_s)_m$ . La deformación serie de la fibra se podrá obtener despejando de la sexta de (5-24):

$$(d\varepsilon_s)_f = \frac{1}{k_f} (d\varepsilon_s)_c - \frac{k_m}{k_f} (d\varepsilon_s)_m \quad (5-39)$$

Para construir el Método de Newton-Raphson sobre la función que se quiere minimizar, dada por (5-38), habrá que considerar su desarrollo en serie de Taylor con respecto a  $(d\varepsilon_s)_m$  hasta su primer orden de aproximación:

$$(\Delta\sigma_s)_{q+1} = (\Delta\sigma_s)_q + \left[ \frac{\partial(\Delta\sigma_s)}{\partial(d\varepsilon_s)_m} \right]_{((d\varepsilon_s)_m)_q} ((d\varepsilon_s)_m)_{q+1} - ((d\varepsilon_s)_m)_q \quad (5-40)$$

La derivada de la función a minimizar, dada en (5-38), respecto de la variable independiente  $(d\varepsilon_s)_m$  adopta la siguiente forma:

$$\frac{\partial(\Delta\sigma_s)}{\partial(d\varepsilon_s)_m} = \frac{\partial(d\sigma_s)_m}{\partial(d\varepsilon_s)_m} - \frac{\partial(d\sigma_s)_f}{\partial(d\varepsilon_s)_f} \frac{\partial(d\varepsilon_s)_f}{\partial(d\varepsilon_s)_m} \quad (5-41)$$

Que efectuando las derivadas<sup>4</sup> de (5-20) para la fibra y la matriz y la derivada de (5-39) respecto de  $d\varepsilon_s$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(d\sigma_s)_m}{\partial(d\varepsilon_s)_m} &= C_{ss}^m \\ \frac{\partial(d\sigma_s)_f}{\partial(d\varepsilon_s)_f} &= C_{ss}^f \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Para efectuar dichas derivadas es necesario recordar que las tensiones y deformaciones son pseudo-vectores dados por la notación de Voigt y las leyes constitutivas son tensores. En este sentido, la notación por componentes de dichas derivadas sería:

$$\begin{aligned} \frac{\partial((d\sigma_s)_k)_i}{\partial((d\varepsilon_s)_k)_j} &= (C_{ss}^k)_{ij}; \quad k = f, m \\ \frac{\partial((d\varepsilon_s)_f)_i}{\partial((d\varepsilon_s)_m)_j} &= -\frac{k_m}{k_f} \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(d\varepsilon_s)_f}{\partial(d\varepsilon_s)_m} = -\frac{k_m}{k_f}I$$

Y sustituyendo de vuelta en (5-41), obtenemos finalmente el jacobiano de la transformación dado en (5-41) particularizado en la iteración  $q^5$ :

$$J_q = \left[ \frac{\partial(\Delta\sigma_s)}{\partial(d\varepsilon_s)_m} \right]_{((d\varepsilon_s)_m)_q} = C_{ss}^m(d_q^m) + \frac{k_m}{k_f} C_{ss}^f(d_q^f) \quad (5-42)$$

Con todo lo anterior, sustituyendo (5-42) en (5-40) , e imponiendo que  $(\Delta\sigma_s)_{q+1} = 0$  se tendrá que:

$$0 = (\Delta\sigma_s)_q + J_q(((d\varepsilon_s)_m)_{q+1} - ((d\varepsilon_s)_m)_q)$$

Y despejando, se obtiene la regla de cálculo característica del Método de Newton-Raphson que permitirá, tras unas cuantas iteraciones, obtener aproximaciones para la deformación serie de la matriz que equilibrará las tensiones serie de fibra y matriz:

$$((d\varepsilon_s)_m)_{q+1} = ((d\varepsilon_s)_m)_q - J_q^{-1}(\Delta\sigma_s)_q \quad (5-43)$$

Donde el jacobiano viene dado por (5-42). Esta regla permite, a partir de una deformación inicial serie para la matriz, iterar para obtener aproximaciones a la solución que verifiquen el cumplimiento del conjunto de ecuaciones (5-24).

Sin embargo, se hace necesario tener una aproximación inicial para las deformaciones serie de la matriz partiendo de los valores de deformación de fibra y matriz del instante anterior,  $[d\varepsilon^f]^t$  y  $[d\varepsilon^m]^t$  y de las deformaciones del compuesto en el instante siguiente  $[d\varepsilon^c]^{t+\Delta t}$ . En este sentido, tal y como se propone en [22], una posibilidad consiste en asumir que los incrementos de deformación serie de la matriz en la aproximación inicial vienen dados por (5-28):

$$(\Delta\varepsilon_s)_m = A \left[ C_{ss}^f(\Delta\varepsilon_s)_c + k_f(C_{sp}^f - C_{sp}^m)(\Delta\varepsilon_p)_c \right] \quad (5-44)$$

Donde:

---

<sup>5</sup> En cada iteración  $q$  se tendrán, evidentemente, deformaciones para la matriz  $((d\varepsilon)_m)_q$  y la fibra  $((d\varepsilon)_f)_q$  que establecerán sendos valores para los parámetros de daño de la matriz y la fibra. Estos valores de los parámetros de daño permitirán obtener los tensores tangentes de rigidez degradados para cada uno de los componentes. Las relaciones funcionales de las deformaciones de fibra y matriz con los parámetros de daño y, a su vez, con los tensores de rigidez degradados son las postuladas en (5-7).

$$(\Delta \varepsilon_p)_c = [d\varepsilon_p^c]^{t+\Delta t} - [d\varepsilon_p^c]^t$$

$$(\Delta \varepsilon_s)_c = [d\varepsilon_s^c]^{t+\Delta t} - [d\varepsilon_s^c]^t$$

Y donde:

$$[d\varepsilon_p^c]^t = [d\varepsilon_p^m]^t$$

$$[d\varepsilon_s^c]^t = k_f [d\varepsilon_s^f]^t + k_m [d\varepsilon_s^m]^t$$

Con todo lo anterior, se obtiene finalmente que la aproximación inicial para la deformación serie de la matriz será:

$$(d\varepsilon_s^m)_{q=1} = [d\varepsilon_s^m]^t + (\Delta \varepsilon_s)_m \quad (5-45)$$

### 5.3. Esquema del método

Con todos estos elementos, el proceso puede esquematizarse según se muestra en el siguiente esquema:



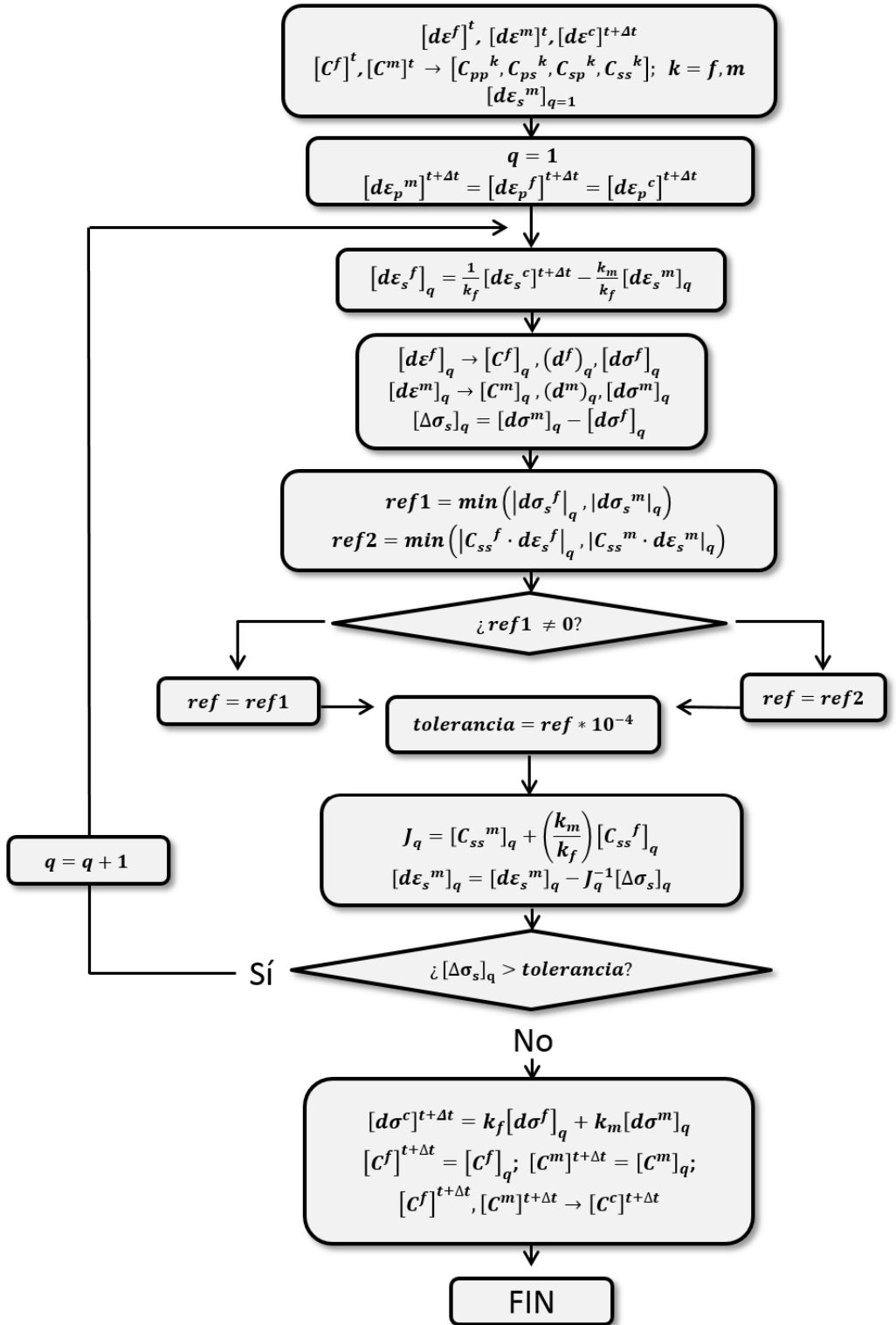


Figura 5-6. Diagrama de flujo del método de resolución serie-paralelo

Este proceso iterativo permite obtener el estado tensional del laminado de manera que se verifiquen las relaciones (5-24) en todos los puntos del dominio. Evidentemente y dado que este método se aplica sobre un soporte de elementos finitos, habrá que ejecutarlo en cada una de las iteraciones necesarias para equilibrar las fuerzas internas con las externas en cada uno de los instantes de tiempo, tal y como se describió en el capítulo anterior. En concreto, el proceso habrá de lanzarse en el cuarto bloque del esquema de la Figura 4.5 justo después de la ejecución del paso correspondiente del Método de Newton-Raphson del bucle externo que permite obtener el vector de deformaciones en el instante siguiente  $[d\varepsilon^c]^{t+\Delta t}$  y del cual partirá el proceso que se describe aquí.

Dicho proceso deberá ser ejecutado así para cada uno de los puntos de cuadratura de todos los elementos finitos que constituyan el dominio completo, en cada iteración de equilibrio y para todos los instantes del tiempo. Las acciones incluidas en cada uno de los bloques del diagrama de la Figura 5-6 se describen a continuación:

- Se parte tanto de las deformaciones de la fibra y matriz en el instante anterior  $[d\varepsilon^f]^t$  y  $[d\varepsilon^m]^t$  como de las deformaciones del compuesto en el instante siguiente  $[d\varepsilon^c]^{t+\Delta t}$ . Además, también serán conocidos los tensores constitutivos tangentes degradados del paso anterior  $[C^f]^t$  y  $[C^m]^t$ , los cuales serán descompuestos en sus componentes serie y paralelo según (5-20). En este primer paso, se obtiene también la primera aproximación para las deformaciones serie de la matriz  $[d\varepsilon_s^m]_{q=1}$  utilizando (5-44) y (5-45).
- En este bloque se inicializa el índice de iteración ( $q = 1$ ) y se igualan las componentes paralelo de las deformaciones del instante siguiente de fibra y matriz,  $[d\varepsilon_p^f]^{t+\Delta t}$  y  $[d\varepsilon_p^m]^{t+\Delta t}$ , a las deformaciones paralelo del compuesto en el instante siguiente  $[d\varepsilon_p^c]^{t+\Delta t}$  y de las cuales se parte según (5-25).
- Se obtienen las deformaciones serie de la fibra en la iteración  $q$ ,  $[d\varepsilon_s^f]_q$  a partir de (5-39).
- Utilizando los modelos de daño de fibra y matriz se obtienen, a partir de  $[d\varepsilon_s^f]_q$  y  $[d\varepsilon_s^m]_q$ , los parámetros de daño  $(d^f)_q$  y  $(d^m)_q$ , los tensores tangentes degradados  $[C^f]_q$  y  $[C^m]_q$  y por último las tensiones de fibra y matriz degradadas  $[d\sigma^f]_q$  y  $[d\sigma^m]_q$ . Este proceso se realiza según el esquema que se mostró en la
- Figura 5-5. Asimismo, se evalúa el residuo  $[\Delta\sigma_s]_q$  según (5-38).
- Se establecen dos opciones para establecer el orden de magnitud de la tolerancia del criterio de parada del método. La primera opción consiste en asumir como referencia el mínimo de los módulos de las tensiones serie de fibra y matriz,  $|d\sigma_s^f|_q$  y  $|d\sigma_s^m|_q$  mientras que la segunda será establecer como referencia, el mínimo de los módulos de las tensiones linealizadas serie de fibra y matriz,  $|C_{ss}^f \cdot d\varepsilon_s^f|_q$  y  $|C_{ss}^m \cdot d\varepsilon_s^m|_q$ .

- La opción por defecto será elegir la primera, siempre que alguna de las tensiones sea distinta de cero. En caso contrario, se elegirá la segunda. Una vez elegida la referencia, la tolerancia será el valor elegido multiplicado por  $10^{-4}$ .
- Se obtiene el jacobiano asociado a la iteración actual  $J_q$ , utilizando (5-42) y se da otro paso del Método de Newton-Raphson según (5-43) que nos proporcionará la siguiente aproximación para la deformación serie de la matriz  $[d\varepsilon_s^m]_q$ .
- Se compara el residuo  $[\Delta\sigma_s]_q$  con la tolerancia. Si el residuo es mayor que la tolerancia se aumenta en uno el índice de iteración y se vuelve al paso tercero.
- En caso contrario, se actualiza el estado tensional del compuesto  $[d\sigma^c]^{t+\Delta t}$ , utilizando la segunda de (5-8) y se actualizan los tensores tangentes degradados de fibra y matriz,  $[C^f]^{t+\Delta t}$  y  $[C^m]^{t+\Delta t}$ . Con la descomposición según (5-20) de estos tensores se calcula, utilizando las expresiones (5-37), el tensor constitutivo tangente del compuesto que será necesario para obtener la matriz de rigidez global de la estructura y ejecutar el próximo paso del bucle exterior del Método de Elementos Finitos que resolverá la estructura. Finalmente, el método termina.

Con el método expuesto, se dispone finalmente de una herramienta que integrada en el soporte de elementos finitos descrito en el Capítulo 4, permite resolver el estado tensional de la estructura de material compuesto en donde las deformaciones y tensiones de sus componentes (fibra y matriz) se relacionen según las expresiones que impone la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo que se ha expuesto en este capítulo.

Sin embargo, para modelar el comportamiento completo de un material compuesto, se requiere incorporar un modelo de daño para la fibra y matriz que permita introducir degradación en los tensores constitutivos de ambos componentes, proporcione los parámetros de daño y permita obtener las tensiones que dichos componentes alcanzan cuando se aplica un sistema de cargas a la estructura. La definición de dicho modelo de daño será el objetivo del próximo capítulo.

## Bibliografía

- [1] Jones, R. M., «2.6 Stress-Strain relations for a lamina of arbitrary orientation,» de *Mechanics of Composite Materials*, 1999, pp. 74-85.
- [2] Zienkiewicz O.C & Taylor R.L., *El Método de los Elementos Finitos*, 1994.
- [3] Rastellini, F.; Oller, S.; Salomon, O. & Oñate, E., «Teoría de mezclas serie-paralelo avanzada para el análisis de materiales compuestos,» de *Composites 2003. V Congreso de la asociación española de materiales compuestos*, July, Zaragoza, Spain, 2003.
- [4] Belytschko, T.; Liu, W.K. & Moran, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, 2000.
- [5] Jones, R. M., «4. Macromechanical behaviour of a laminate,» de *Mechanics of Composite Materials*, 1999, pp. 187-276.
- [6] París, F. ; Cañas J. & Marín, J.C., *Introducción al diseño de los materiales compuestos*, Grupo de Elasticidad Y Resistencia de Materiales, 2006.
- [7] Trusdell, C. & Toupin, R., *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik III/I edition., Berlin, Germany: Springer, Verlag, 1960.
- [8] Tsai, W., «Strength Characteristics of Composite Materials,» *Nautical Aeronautics and Space Administration*, 1965.
- [9] Jones, R. M., «2.9 Biaxial strength criteria for an orthotropic lamina,» de *Mechanics of Composite Materials*, 1999, pp. 102-117.
- [10] Car, E. J., «2.11 Criterios de falla para materiales compuestos,» de *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*, 2000, pp. 59-63.
- [11] Hashin, Z., «Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, pp. 329-334, 1980.
- [12] Puck, A. & Schürmann, H., «Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models,» *Composites Science and Technology*, nº 58, pp. 1045-1067, 1996.
- [13] Orifici, A.C.; Herszberg, I. & Thomson, R.S., «Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure,» *Composite Structures*, nº 86, pp. 194-210, 2008.
- [14] Car, E. J., «2.12 Modelos estructurales multiescala,» de *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*, 2000, pp.

- 63-68.
- [15] Zalamea, F.; Canet, J.M. & Oller S., «Teoría de homogeneización para el análisis de materiales compuestos con estructura interna periódica,» de *In R. Abascal, J. Dominguez y G.Bugueda (Eds.), Proceedings del IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 1999.
  - [16] Oller, S., «2. Anisotropía Mecánica,» de *Simulación Numérica del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos*, 2003, pp. 2-1 a 2-33.
  - [17] Oller, S., «3. Teoría de mezclas,» de *Simulación Numérica del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos*, 2003, pp. 3-1, 3-45.
  - [18] Jones, R. M., «3. Micromechanical behaviour of a laminate,» de *Mechanics of Composite Materials*, 1999, pp. 121-186.
  - [19] Car, E. J., «4. Teoría de mezclas,» de *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*, 2000, pp. 123-147.
  - [20] Neamtu, L.; Oller, S. & Oñate, E., «A generalized mixing theory elasto-damage-plastic model for finite element analysis of composites,» de *Complas V-Computational Plasticity*, Barcelona, Spain, Owen, D., Oñate, E., and Hinton, E., editors, 1997, pp. 1-5.
  - [21] Rastellini, F. & Oller S., «Modelado numérico de la no linealidad constitutiva en laminados compuestos - Teoría de mezclas,» de *Proceeding (CD) of: Métodos Computacionais em Engenharia. APMTAC*, Lisboa (Portugal), 2004.
  - [22] Rastellini, F.G., «4. Modelo Constitutivo para Compuestos con Fibras Largas. Composición de Modelos Constitutivos,» de *Modelización Numérica de la No-Linealidad Constitutiva de Laminados Compuestos*, Barcelona, PhD thesis, Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE)-UPC, 2006, pp. 63-91.
  - [23] Rastellini, F.G., «4.8 Modelo Enriquecido Serie-Paralelo (ESP),» de *Modelización Numérica de la No Linealidad Constitutiva de Laminados Compuestos*, Barcelona, PhD thesis, Departament de Resistència de Materials i Estructures a l'Enginyeria (RMEE)-UPC, 2006, pp. 81-90.
  - [24] Dvorak, GJ. & Bahei-El-Din, YA., «A bimodal plasticity theory of fibrous composite materials,» de *Acta Mech.*, 1987.
  - [25] Salomon, O.; Rastellini, F.; Oller, S. & Oñate, E., «Fatigue prediction for composite materials and structures,» de *NATO Symposium AVT-121*, Granada (Spain), 2005.
  - [26] Martinez, X.; Oller, S. & Barbero E., «Caracterización de la delaminación en materiales compuestos mediante la teoría de mezclas serie/paralelo,» *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 3, nº 27, pp. 189-199, 2010.



## 6. Modelo de Daño





## 6.1. Introducción

El análisis lineal del comportamiento mecánico de los materiales proporciona una herramienta muy apropiada cuando se tiene interés en modelar el tramo inicial elástico de comportamiento. Sin embargo, el estudio de solicitaciones que produzcan la degradación del material conlleva, en general, tener que abordar comportamientos no lineales que necesitarán métodos iterativos de resolución.

En los capítulos anteriores de esta tesis, la incorporación de modelos de degradación de las propiedades mecánicas del material se ha tenido en cuenta mediante variables internas. Además, también se ha postulado la existencia de ecuaciones de evolución para estas variables internas que es necesario definir para permitir el cálculo. Existen diferentes metodologías para abordar la degradación que se pueden clasificar, fundamentalmente, en dos vertientes principales.

Por un lado, se tienen aquellos problemas donde aparece comportamiento plástico asociado normalmente a la aparición de deformaciones permanentes y fenómenos de fluencia. Por contra, se contemplan aquellos problemas donde la degradación del material se introduce a través de una zona de daño creciente.

En el caso de la degradación plástica, las ecuaciones de evolución se obtienen a partir de una determinada relación o criterio de fluencia que permite distinguir el inicio del comportamiento plástico. Las variables internas son las deformaciones plásticas cuyo cálculo pasa por la determinación de un cierto multiplicador plástico que magnifique el gradiente de la función de fluencia en el espacio de tensiones. Una descripción de estos aspectos puede encontrarse en [1] o [2]. Además, los multiplicadores plásticos y las funciones de fluencia deben ser capaces de modelar tanto fenómenos de carga y descarga como de verificar determinadas condiciones de estabilidad. Dichas condiciones se ven satisfechas si se garantiza el cumplimiento de las relaciones de desigualdad de Kuhn-Tucker [3]. Estas relaciones establecen la positividad del multiplicador plástico, el hecho de que la función de fluencia plástica sea siempre menor o igual a cero (negativa cuando el sólido aún se encuentra en el tramo elástico y nula cuando plastifica) y que el producto de ambas magnitudes debe ser cero. Dentro de la vertiente plástica de degradación, además, se pueden considerar diferentes criterios de plastificación, dando una gran versatilidad a este tipo de planteamientos a la hora de modelar materiales que presentan grandes tramos de ductilidad fuera del comportamiento elástico. Descripciones de los criterios de fluencia más conocidos se pueden encontrar en [4] o [5].

Sin embargo, la proposición de modelos de degradación para materiales compuestos requiere considerar que estos materiales suelen tener fracciones volumétricas elevadas de matriz y, por tanto, tendrán un comportamiento marcadamente frágil que no se ajusta bien al régimen plástico de comportamiento. Además, la heterogeneidad del material compuesto anticipa la presencia de diferentes mecanismos de daño en función del estado de carga aplicado. Es, en estos casos, donde se utilizan los planteamientos enmarcados en el segundo grupo de metodologías.

Dentro de este grupo, se encuentran los procedimientos que se engloban dentro de la denominación de *modelos de daño* y que están basados en la Mecánica del Daño Continuo. Los primeros trabajos sobre esta materia [6] consideran el material dañado como un medio continuo sujeto a los principios de la Termodinámica Clásica a pesar de sus heterogeneidades e imperfecciones. Dichos modelos son capaces de describir el fenómeno de daño mediante la definición de magnitudes cuya dimensionalidad puede variar desde el rango de vectores a tensores de orden superior [7]. El carácter tensorial de estas magnitudes pretende recoger la anisotropía, en principio inherente, a los fenómenos que se describen. Los primeros trabajos que utilizan este tipo de modelos ([8], [9] y [10]), describen el daño como un tensor de segundo orden mientras que otros ([11] y [12]) utilizan tensores de cuarto orden. Estos trabajos proporcionan modelos que resultan aplicables a costes computacionales razonables.

De forma general, se puede decir que cuando la carga no actúa en la dirección de la fibra, es el daño de la matriz el que gobierna la degradación del material compuesto. En este caso, si las cargas son de tracción, el fenómeno de daño se produce por el *agrietamiento de la matriz* [13] cuando las cargas exceden la resistencia del material. Este fenómeno se produce en dos etapas diferenciadas. La primera de ellas viene caracterizada por la iniciación y el proliferamiento de grietas que aparecen en direcciones perpendiculares a la dirección de la carga. Sin embargo, las grietas quedan confinadas en la matriz y aumentan sólo en número, siendo su tamaño medio inferior al espacio entre fibras. En la segunda etapa, se produce el crecimiento preferente de algunas grietas, pudiéndose producir el desligamiento y/o rotura de la fibra cuando el tamaño de las fisuras es suficiente para alcanzar la interfase fibra-matriz.

Por otro lado, los mecanismos de daño que gobiernan el deterioro de la fibra son variados y dependen de si la carga, a lo largo de la dirección de la fibra, es de tracción o compresión. En este sentido, cuando la carga es de tracción, el daño es proporcional al número de fibras rotas [14]. Por el contrario, cuando las cargas son de compresión, el mecanismo de daño viene gobernado por el efecto conocido como *micropandeo* [15].

Sin embargo, dado que los principales mecanismos de fallo son la rotura y/o el desligamiento de las fibras y el agrietamiento de la matriz en la dirección paralela y perpendicular a la fibra, es suficiente considerar, para la variable de daño, un tensor de segundo orden cuyas direcciones principales coincidan con las del material considerado ortótropo [13]. En la referencia citada, se considera como criterio de daño una forma isótropa que termina reduciéndose al criterio de Tsai-Wu.

En esta misma línea, se describe en [16] un modelo de daño que utiliza, de nuevo, un tensor de segundo orden simétrico que describe la evolución de los defectos en las direcciones de la fibra y la matriz y una variable de daño escalar que da cuenta del tamaño de la zona dañada. La ley de evolución de la variable de daño es también isótropa, en concordancia con la falta de evidencia experimental de anisotropía en dicha zona. En este caso, el criterio de daño vuelve a reducirse, por simplicidad, al criterio de Tsai-Wu.

Adicionalmente, tanto en [13] como en [16], se tienen en cuenta los efectos inelásticos mediante una reducción de la rigidez mientras que, para modelar el incremento del daño y las deformaciones permanentes, se consideran tensiones efectivas. A este efecto, estas tensiones efectivas se calculan a partir de las tensiones elásticas mediante un tensor de cuarto orden relacionado con el tensor de daño.

Dentro de la Mecánica del Daño Continuo, otros autores optan por la elección de diversas variables de daño escalares (una asociada a cada modo de fallo) que permitirán degradar las propiedades mecánicas de la lámina de material compuesto, considerada, de nuevo, como un material ortótropo. En esta línea, una propuesta [17] consiste en considerar tres variables de daño escalar, una para la fibra y otras dos para el agrietamiento de la matriz en las direcciones transversal y longitudinal. Además, se utiliza como criterio de fallo el LaRCO4. El modelo propuesto produce resultados que presentan una buena correlación experimental a la hora de determinar la carga de rotura de laminados con agujero [18]. Otra alternativa [19] es considerar, de nuevo, tres variables de daño escalar pero ahora para la fibra, el agrietamiento y el fallo por cortadura de la matriz respectivamente. En este caso, mientras que la iniciación del modo de fallo para la fibra se determina con el criterio de la máxima tensión, el comienzo del fallo de la matriz viene gobernada por el criterio de Hashin. También, se puede utilizar esta misma idea separando las variables de daño para fibra y matriz mediante la definición de casos diferenciados para tracción y compresión [20]. Una revisión de trabajos sobre esta temática se puede encontrar en [21].

En el presente trabajo, se propone, para modelar la degradación de los laminados de material compuesto, utilizar las hipótesis de la Mecánica del Daño Continuo [22]. En concreto, se optará por la formulación de *daño isótropo continuo* expuesta en [23] que presenta una estructura muy similar a la formulación de los problemas plásticos. Esta formulación utiliza una variable escalar para la fibra y otra para la matriz que dan cuenta de la degradación provocada por la presencia del mecanismo de daño. En virtud de estas variables, dicho mecanismo avanza isotrópicamente, ya que todas las componentes de tensión se verán afectadas de la misma manera.

Para modelar la ortotropía propia de los laminados de material compuesto, se propone utilizar este modelo de daño isótropo en conjunto con la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo que se describió en el capítulo anterior. Esta aplicación combinada permite modelar la ortotropía considerando diferentes comportamientos (paralelo o serie) para las diferentes direcciones (la de la fibra y las perpendiculares) a la hora de componer las propiedades del material compuesto a partir de las propiedades de fibra y matriz. A su vez, la fibra y la matriz se considerarán materiales isótropos que se degradarán según el modelo de daño isótropo continuo que se describe a continuación.

## 6.2. Descripción del modelo

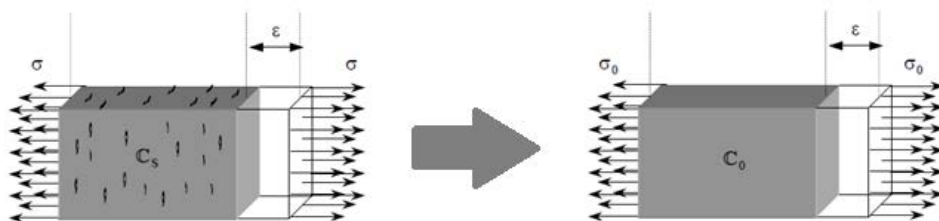
En este apartado, se exponen los principales aspectos del modelo de daño continuo isótropo que se utilizará en este trabajo, siguiendo la línea de exposición dada en [24].

### Parámetro de daño y función umbral

La degradación en este modelo viene determinada por una variable escalar interna de daño que se denominará  $d$  y que permite convertir el espacio de tensiones real en otro espacio efectivo que retomaría las tensiones que tendría el sólido si éste no se hubiera degradado. Esta transformación se hace según:

$$\sigma = (1 - d)\sigma_o = (1 - d)C_o\varepsilon; \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (6-1)$$

Donde  $C_o$  es el tensor que representa la ley de comportamiento del material en su tramo elástico y  $\sigma$  y  $\sigma_o$  representan las componentes del tensor de tensiones en el espacio real y en el espacio sin degradar respectivamente. Esta degradación que al considerarse isótropa es la misma para todas las direcciones conecta, como se ha dicho, los espacios degradados y sin degradar según el esquema siguiente:



**Figura 6.1. Relación entre los espacios de tensiones. Izquierda (espacio real), derecha (espacio no degradado). [25]**

El criterio de daño se utiliza para separar el estado en el cual el material está aún intacto de un estado en el que el nivel tensional se ve modificado por la presencia de micro grietas. El criterio de daño, en forma general, se formula de una forma similar a los criterios de fluencia de la plasticidad:

$$F(\sigma_o, d) = f(\sigma_o) - c(d) \leq 0 \quad (6-2)$$

Donde  $f(\sigma_o)$  es una función del estado tensional del material en el espacio no degradado y  $c(d)$  define la posición del llamado umbral de daño. La función  $F(\sigma_o, d)$  determina los estados de carga y descarga y debe, además de ser una función escalar, ser semidefinida negativa. En cuanto al umbral, éste debe ir actualizando su valor a medida que el parámetro de daño vaya variando. Su valor inicial se considera una propiedad del material y determina el valor del llamado umbral de primer daño [23], estando relacionado con su resistencia a compresión:

$$c(d) = c^{max} \quad (6-3)$$

Así, el daño empezará a producirse cuando  $f(\sigma_o)$  alcance por primera el valor  $c^{max}$  y, a partir de ahí, el criterio y la evolución de los parámetros determinará el avance del proceso de degradación en el sólido. De forma usual, se suele trabajar con un criterio alternativo a (6-2) mediante una función escalar  $G$  definida positiva y con derivada monótonamente creciente, que sea además invertible y que permita enunciar una ley de evolución del parámetro de daño como se verá en el apartado siguiente:

$$\bar{F}(\sigma_o, d) = G(f(\sigma_o)) - G(c(d)) \leq 0 \quad (6-4)$$

### Ley de evolución del parámetro de daño

Para poder incluir el modelo de daño que se describe, en la parte correspondiente de la teoría de mezclas que se desarrolló en el capítulo anterior, se hace necesario proponer alguna ley de evolución de la variable interna de daño  $d$ . Se utilizará la ley de evolución propuesta en [24]:

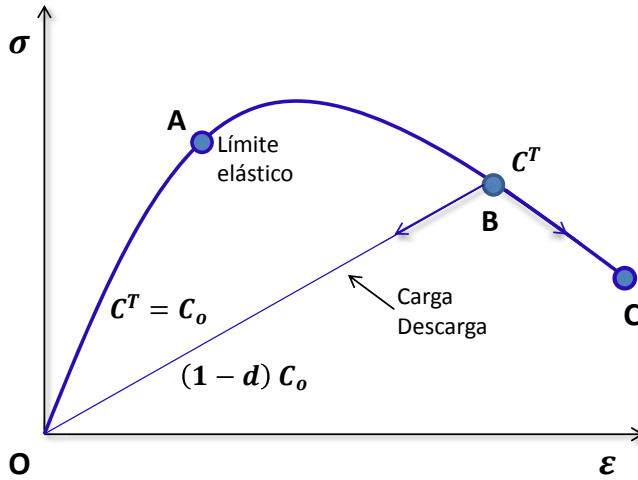
$$\dot{d} = \dot{\mu} \frac{\partial \bar{F}(\sigma_o, d)}{\partial f(\sigma_o)} = \dot{\mu} \frac{\partial G(f(\sigma_o))}{\partial f(\sigma_o)} \quad (6-5)$$

El parámetro  $\mu$  que recibe el nombre de *factor de consistencia de daño*, es un escalar no negativo y desempeña un papel completamente análogo al multiplicador plástico. Con estos elementos, se pueden describir situaciones de carga y descarga y deberán, además, verificar las relaciones de desigualdad de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\mu} \geq 0; \quad \bar{F}(\sigma_o, d) \leq 0; \quad \dot{\mu} \bar{F}(\sigma_o, d) = 0 \quad (6-6)$$

El significado de las inecuaciones expresadas en (6-6) es claro sobre un esquema de carga-descarga como el representado en la Figura 6.2. Cuando se está en una etapa donde se

evoluciona en ausencia de daño (tramo elástico  $OA$  o el tramo de carga descarga  $OB$ ), la función  $\bar{F}(\sigma_o, d)$  según (6-4), será negativa, ya que se estará por debajo del valor umbral que impone  $G(c(d))$  y además, el multiplicador  $\mu$  al ser nulo impondrá una evolución del parámetro de daño  $\dot{d}$  también nula según (6-5). Por otro lado, cuando el daño evolucione y, por tanto, se esté sobre la superficie de daño (tramo  $AB$  o  $BC$ ), la función  $\bar{F}(\sigma_o, d)$  será nula garantizando la tercera de (6-6) aunque  $\dot{\mu}$  no lo sea, proveyendo evolución para el parámetro de daño según (6-5).



**Figura 6.2.** Curva tensión-deformación en un proceso de carga y descarga tras rebasar el umbral elástico y presencia de daño

Adicionalmente, aparecen representados en la Figura 6.2, los tensores constitutivos secante, dado por  $(1-d)C_o$ , y el tangente  $C^T$  para el punto B del esquema. Si, a continuación, se evalúa la derivada temporal de  $G(f(\sigma_o))$ , se tendrá:

$$\dot{G}(f(\sigma_o)) = \frac{\partial G(f(\sigma_o))}{\partial f(\sigma_o)} \frac{\partial f(\sigma_o)}{\partial t} \quad (6-7)$$

Que, si se considera  $\dot{\mu} = \frac{\partial f(\sigma_o)}{\partial t}$ , se puede identificar (6-5) con (6-7) y asumir que:

$$\dot{d} = \dot{G}(f(\sigma_o)) \quad (6-8)$$

E integrando explícitamente (6-8):

$$d = \int_0^t \dot{d} dt = \int_0^t \dot{G}(f(\sigma_o)) dt = G(f(\sigma_o)) \quad (6-9)$$

Este proceso permite, de forma explícita, obtener el parámetro de daño y asociar su evolución a la función  $G(f(\sigma_o))$ . De esta manera, el proceso de daño quedaría definido simplemente eligiendo la función de daño  $G(f(\sigma_o))$ . Además, la función umbral de daño  $c(d)$  postulada en (6-3), se definirá según:

$$c(d) = \max\{c^{max}, \max\{f(\sigma_o)\}_s\}; \quad 0 \leq s \leq t \quad (6-10)$$

Con todo lo anterior, para establecer la evolución de los parámetros de daño habrá que concretar la forma de  $G(f(\sigma_o))$  y la forma de la propia función de fluencia  $f(\sigma_o)$ .

### Elección de la función umbral de tensión

Para  $G(f(\sigma_o))$ , se admitirán dos formas funcionales. La primera de ellas será la exponencial propuesta en [23]:

$$d = G(f(\sigma_o)) = 1 - \frac{c^{max}}{f(\sigma_o)} e^{A(1 - \frac{f(\sigma_o)}{c^{max}})} \quad (6-11)$$

Mientras que la evolución lineal [24] será:

$$d = G(f(\sigma_o)) = \left(1 - \frac{c^{max}}{f(\sigma_o)}\right) \frac{1}{1 + A} \quad (6-12)$$

El fenómeno del daño, válido para materiales frágiles, está estrechamente relacionado con la Mecánica de la Fractura y con la capacidad del material para absorber energía. De alguna manera, este vínculo vendrá ligado a la interconexión entre la capacidad de la variable de daño de crecer y el hecho de que los labios de las microgrietas crezcan cuando la energía almacenada en el sólido sea suficiente.

Esta interconexión se garantiza mediante la constante  $A$  que aparece en (6-11) y (6-12) y dependerá de la energía de fractura del material. Para establecer la relación entre la constante  $A$  y la energía de fractura del material, se impondrá la finitud de la energía de disipación en cualquier proceso de evolución de daño que se quiera considerar.

En el capítulo cuarto se dedujo, aparte de la ecuación constitutiva (expresión 4.46), la ecuación de disipación energética (expresión 4.47). Dicha ecuación estaba escrita en términos de la energía libre de Helmholtz  $F$  y de las variables internas  $\alpha_i$ . Para reescribir la ecuación de disipación, usando la ecuación (6-1), se harán las siguientes identificaciones:

$$\alpha_i = d \quad (6-13)$$

$$F(\varepsilon_{ij}, d) = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma = \frac{1}{2} \varepsilon (1 - d) C_o \varepsilon = (1 - d) \frac{1}{2} \varepsilon C_o \varepsilon = (1 - d) F_o$$

La variable interna, en este caso, corresponde al parámetro de daño  $d$  y  $F_o$  es la energía libre de Helmholtz del material sin dañar. Se tiene para la ecuación de disipación (4-47), sustituyendo (6-13):

$$\frac{\partial F}{\partial d} \dot{d} = \frac{\partial [(1 - d) F_o]}{\partial d} \dot{d} = -F_o \dot{d} \leq 0$$

O bien que:

$$F_o \dot{d} \geq 0 \quad (6-14)$$

Para acotar el valor de la energía de disipación habrá que garantizar que la integral de la energía disipada a lo largo del tiempo sea un valor finito  $g_f \left( \frac{1}{\text{m}^3} \right)$ :

$$g_f = \int_{t_o}^{t_f} F_o \dot{d} dt \quad (6-15)$$

Teniendo en cuenta que, según (6-8),  $\dot{d} dt = \dot{G}(f(\sigma_o)) dt = \frac{\partial G(f(\sigma_o))}{\partial f(\sigma_o)} \frac{\partial f(\sigma_o)}{\partial t} dt$ , se puede reescribir (6-15) de la siguiente manera:

$$g_f = \int_{[f(\sigma_o)]_{t=t_o}}^{[f(\sigma_o)]_{t=t_f}} F_o \frac{\partial G(f(\sigma_o))}{\partial f(\sigma_o)} df(\sigma_o) \quad (6-16)$$

Sobre los límites que aparecen en la integral anterior se debe notar que habrá que adecuarlos para cada una de las formas funcionales que se proponen en (6-11) y (6-12). Para poder establecerlos habrá que fijarse en los valores límite que tiene la variable de daño interna. En cuanto al límite inferior se tiene que, cuando  $f(\sigma_o) = [f(\sigma_o)]_{t=t_o} = c^{max}$ , para ambas formas funcionales, se cumple que  $d = 0$ . Sin embargo, mientras que el límite superior infinito verifica la condición de contorno en el caso exponencial, es decir  $d([f(\sigma_o)]_{t=t_f} \rightarrow \infty) = 1$ , en el caso lineal se requiere obtenerlo despejando de la siguiente igualdad:

$$d = 1 = \left( 1 - \frac{c^{max}}{([f(\sigma_o)]_{t=t_f})_{d=1}} \right) \frac{1}{1 + A}$$



Que despejando produce:

$$\left([f(\sigma_o)]_{t=t_f}\right)_{d=1} = -\frac{c^{max}}{A}$$

Así, los límites de la integral (6-16) para ambas formas funcionales se pueden sumarizar como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{ll} [f(\sigma_o)]_{t=t_f} \rightarrow \infty; & [f(\sigma_o)]_{t=t_o} = c^{max} \\ [f(\sigma_o)]_{t=t_f} = -\frac{c^{max}}{A}; & [f(\sigma_o)]_{t=t_o} = c^{max} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(exponencial)} \\ \text{(lineal)} \end{array} \quad (6-17)$$

Habiendo quedado establecidos los límites que habrá que aplicar en la integral (6-16), se puede obtener integrando por partes:

$$\begin{aligned} g_f &= \int_{[f(\sigma_o)]_{t=t_o}}^{[f(\sigma_o)]_{t=t_f}} F_o \frac{\partial G(f(\sigma_o))}{\partial f(\sigma_o)} df(\sigma_o) \\ &= \left[ \begin{array}{ll} u = F_o & du = \frac{\partial F_o}{\partial f(\sigma_o)} df(\sigma_o) \\ dv = \frac{\partial G(f(\sigma_o))}{\partial f(\sigma_o)} df(\sigma_o) & v = G(f(\sigma_o)) \end{array} \right] \\ &= [F_o G(f(\sigma_o))]_{[f(\sigma_o)]_{t=t_o}}^{[f(\sigma_o)]_{t=t_f}} - \int_{[f(\sigma_o)]_{t=t_o}}^{[f(\sigma_o)]_{t=t_f}} G(f(\sigma_o)) \frac{\partial F_o}{\partial f(\sigma_o)} df(\sigma_o) \end{aligned} \quad (6-18)$$

Faltaría para terminar de especificar el modelo de daño, elegir la función umbral de tensión  $f(\sigma_o)$ . En el caso de este trabajo, se optará por el modelo de Simo y Ju [11] que permite, mediante una modificación que se especificará más adelante, estudiar estados de tensión generalizados de tracción y compresión combinados. La forma de la función umbral en el espacio de tensiones definida por el citado modelo se puede escribir:

$$f(\sigma_o) = \sqrt{2F_o} = \sqrt{\varepsilon C_o \varepsilon} \quad (6-19)$$

La función umbral representa la raíz cuadrada del doble de la energía libre, presentando un claro significado físico. Esto junto con el hecho de que resulta fácil de implementar motivan la elección de esta función como umbral de daño. Para poder determinar el valor del primer umbral de tensión  $c^{max}$ , dado en (6-3) y (6-10), se recurrirá a un ensayo uniaxial de tracción donde en el primer umbral de daño se tendrá, en (6-2), que  $F(\sigma_o, d) = 0$  o bien que:

$$f(\sigma_o) = \sqrt{\varepsilon C_o \varepsilon} = \sqrt{E_{11}[\varepsilon_{xx}]\sigma_{xx}^{max}} = \frac{\sigma_{xx}^{max}}{\sqrt{E_{11}}} = c^{max} \quad (6-20)$$

Donde se ha tenido en cuenta que, al ser un ensayo uniaxial de tracción llevado hasta el primer umbral de daño, la única componente de deformación relevante será  $\varepsilon_{xx}$  y la única componente de tensión será  $\sigma_{xx}^{max}$  que además será la máxima tensión que soporta el material a tracción frente a la rigidez dada por el módulo de Young  $E_{11}$  en la dirección donde se practica el ensayo.

Se hace necesario también realizar las integrales dadas en (6-18) para las dos funciones  $G(f(\sigma_o))$ , exponencial y lineal, dadas en (6-11) y (6-12) respectivamente, y considerando las condiciones de contorno (6-17). Usando la función umbral, dada en (6-19), se tiene que  $F_o = \frac{1}{2} f(\sigma_o)^2$  y  $\frac{\partial F_o}{\partial f(\sigma_o)} = f(\sigma_o)$  y, por tanto, se tendrá en (6-18) si elegimos la versión exponencial:

$$g_f = \left[ \frac{1}{2} f(\sigma_o)^2 \left( 1 - \frac{c^{max}}{f(\sigma_o)} e^{A \left( 1 - \frac{f(\sigma_o)}{c^{max}} \right)} \right) \right]_{c^{max}}^{\infty} - \int_{c^{max}}^{\infty} \left( 1 - \frac{c^{max}}{f(\sigma_o)} e^{A \left( 1 - \frac{f(\sigma_o)}{c^{max}} \right)} \right) f(\sigma_o) df(\sigma_o)$$

Tras reordenar y efectuar la integral se tiene que:

$$g_f = \left[ \frac{1}{2} f(\sigma_o)^2 \right]_{c^{max}}^{\infty} - \left[ \frac{1}{2} c^{max} f(\sigma_o) e^{A \left( 1 - \frac{f(\sigma_o)}{c^{max}} \right)} \right]_{c^{max}}^{\infty} - \left[ \frac{1}{2} f(\sigma_o)^2 \right]_{c^{max}}^{\infty} - \frac{c^{max^2}}{A} \left[ e^{A \left( 1 - \frac{f(\sigma_o)}{c^{max}} \right)} \right]_{c^{max}}^{\infty}$$

Pero observando que los límites que aparecen toman valores nulos:

$$\lim_{f(\sigma_o) \rightarrow \infty} f(\sigma_o) e^{A \left( 1 - \frac{f(\sigma_o)}{c^{max}} \right)} = 0$$

$$\lim_{f(\sigma_o) \rightarrow \infty} e^{A \left( 1 - \frac{f(\sigma_o)}{c^{max}} \right)} = 0$$

Se tiene finalmente que:

$$g_f = c^{max^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) \rightarrow A = \frac{1}{\frac{g_f}{c^{max^2}} - \frac{1}{2}} \quad (6-21)$$

Análogamente, sustituyendo en (6-18), la expresión lineal dada en (6-12) para  $G(f(\sigma_o))$ :

$$g_f = \left[ \frac{1}{2} f(\sigma_o)^2 \left( 1 - \frac{c^{max}}{f(\sigma_o)} \right) \frac{1}{(1+A)} \right]_{c^{max}}^{\frac{c^{max}}{A}} - \int_{c^{max}}^{\frac{c^{max}}{A}} \left( 1 - \frac{c^{max}}{f(\sigma_o)} \right) \frac{1}{(1+A)} f(\sigma_o) df(\sigma_o)$$

Que, reordenando y realizando la integración, se tiene que:

$$g_f = \frac{1}{(1+A)} \left[ \frac{1}{2} f(\sigma_o)^2 \right]_{c^{max}}^{\frac{c^{max}}{A}} - \left[ \frac{1}{2} \frac{c^{max} f(\sigma_o)}{(1+A)} \right]_{c^{max}}^{\frac{c^{max}}{A}} - \frac{1}{(1+A)} \left[ \frac{1}{2} f(\sigma_o)^2 \right]_{c^{max}}^{\frac{c^{max}}{A}} + \frac{c^{max}}{(1+A)} [f(\sigma_o)]_{c^{max}}^{\frac{c^{max}}{A}}$$

Lo anterior permite despejar finalmente:

$$g_f = \frac{c^{max2}}{A} \left( -\frac{1}{2} \right) \rightarrow A = -\frac{c^{max2}}{2g_f} \quad (6-22)$$

Los valores de la constante  $A$  que se han hecho en (6-21) y (6-22), permiten cerrar el modelo de daño que se está describiendo en este apartado.

A modo de ejemplo, se puede utilizar este modelo para describir la degradación de las tensiones que sufre un sólido en un ensayo uniaxial de tracción. Para ello se consideran las siguientes propiedades mecánicas<sup>1</sup> del material:

Constantes	Valores
$E_{11}$	4.88 GPa
$\sigma_{xx}^{max}$	6 MPa
$g_f$	193160 $\frac{J}{m^3}$

**Tabla 6-1. Propiedades del material para el ensayo de tracción**

Constantes	Valores
$c^{max}$	85.89 $Pa^{\frac{1}{2}}$
$A_{exp}$	0.0389
$A_{lin}$	-0.0191

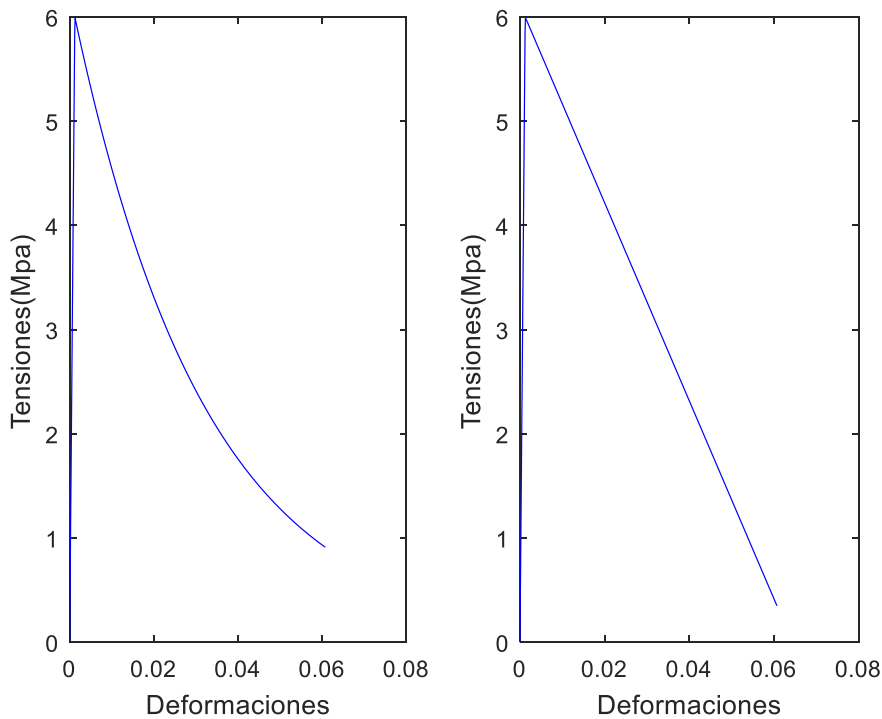
**Tabla 6-2. Valores de los parámetros del modelo de daño continuo usando la función umbral de daño de Simo-Ju**

Dada la simplicidad del ensayo de tracción propuesto, la función umbral de daño (6-19) adquiere la forma simplificada  $f(\sigma_o) = \varepsilon \sqrt{E_{11}}$  mientras que la ley de comportamiento elástica se escribe  $\sigma_o = E_{11} \varepsilon$ . Debido a esto, las formas funcionales de la función tensión-deformación en la zona donde el daño opera se pueden obtener sustituyendo la forma funcional del umbral de daño para este caso en (6-11) y (6-12) respectivamente y éstas a su vez en (6-1). Haciendo esto y teniendo en cuenta (6-20), se obtiene:

<sup>1</sup> El módulo de Young es de un valor característico similar al de un polímero o una resina epoxi. A partir de las propiedades mecánicas de la Tabla 6-1, se calculan las constantes del modelo que aparecen en la Tabla 6-2 utilizando respectivamente (6-20), (6-21) y (6-22).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_{xx}^{max} e^{A \left( 1 - \frac{\varepsilon E_{11}}{\sigma_{xx}^{max}} \right)} \\ \sigma = \frac{(A E_{11} \varepsilon + \sigma_{xx}^{max})}{1 + A} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(exponencial)} \\ \text{(lineal)} \end{array} \quad (6-23)$$

Que representan respectivamente una exponencial decreciente y una recta de pendiente negativa (la constante  $A$  en el caso lineal es negativa según (6-22)) en los tramos donde se activa el daño. En la Figura 6.3, se muestra la evolución de las tensiones cuando se produce un fenómeno de daño con funciones de ablandamiento exponencial y lineal para un determinado sólido sometido a un estado de tracción pura como el que se ha propuesto. También se muestra en la Figura 6.4, las curvas con la variación de la variable interna de daño para los dos tipos de ablandamiento.



**Figura 6.3. Relación tensión-deformación para un material con ablandamiento exponencial (izquierda) y ablandamiento lineal (derecha)**

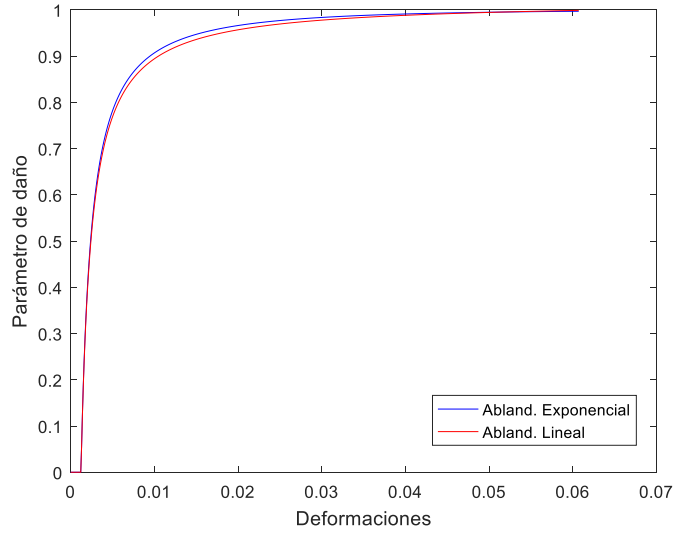


Figura 6.4. Evolución del parámetro de daño para los dos tipos de ablandamiento

### Conexión del modelo de daño con la Mecánica de la Fractura

La Mecánica de la Fractura formulada por Griffith [26] habitualmente se construye sobre el hecho de que cuando la energía almacenada por el sólido al deformarse es igual a la energía necesaria para abrir nuevas superficies, la grieta se propaga. Esta energía  $W$  (dado que cuantifica el trabajo físico necesario para abrir nuevas superficies) suele manejarse por unidad de área. Esta magnitud  $K$  se conoce como *tenacidad a fractura* y se determina en términos globales según:

$$K = \frac{W}{A} \quad (6-24)$$

Donde  $A$  hace referencia al área de formación de nuevas superficies en términos de abertura de grietas. Para relacionar la física que implica el modelo de daño que se ha propuesto con la Mecánica de la Fractura existe una vía que consiste en equiparar la energía disipada por la generación de daño a la energía necesaria para abrir nuevas superficies [27]. Para ello, hay que igualar (6-24) a la energía por unidad de volumen multiplicada por el volumen de la zona afectada por el daño:

$$g_f V = g_f A l = K A$$

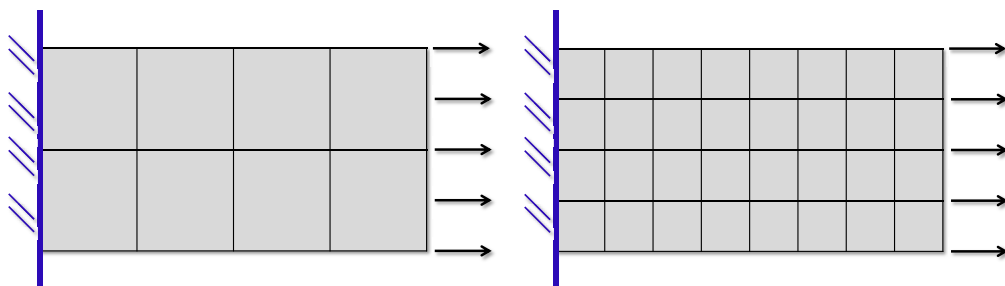
Donde  $l$  es una unidad de profundidad perpendicular al área de fractura. Despejando:

$$g_f = \frac{K}{l} \quad (6-25)$$

Esta magnitud  $l$ , que en un medio continuo tiene un valor tendente a cero, adquiere un valor finito en un código de elementos finitos y corresponde a una magnitud característica que representa el espacio entre dos elementos contiguos o entre los nodos de un mismo elemento. En otras palabras, la relación (6-25) permite cuantificar la energía de disipación por unidad de volumen  $g_f$  a partir de la tenacidad a fractura  $K$  del material y la longitud característica  $l$  que será distinta para cada elemento finito en la malla de discretización que se considere.

Dado que la energía de disipación por unidad de volumen permite calcular la constante  $A$ , a través de (6-21) y (6-22), existe una dependencia del modelo de daño y, por tanto, de la zona dañada con la malla que se utilice. Se puede decir, por tanto, que cuanto mayor sean los elementos que componen la malla, la energía de disipación, dada en (6-25), será menor.

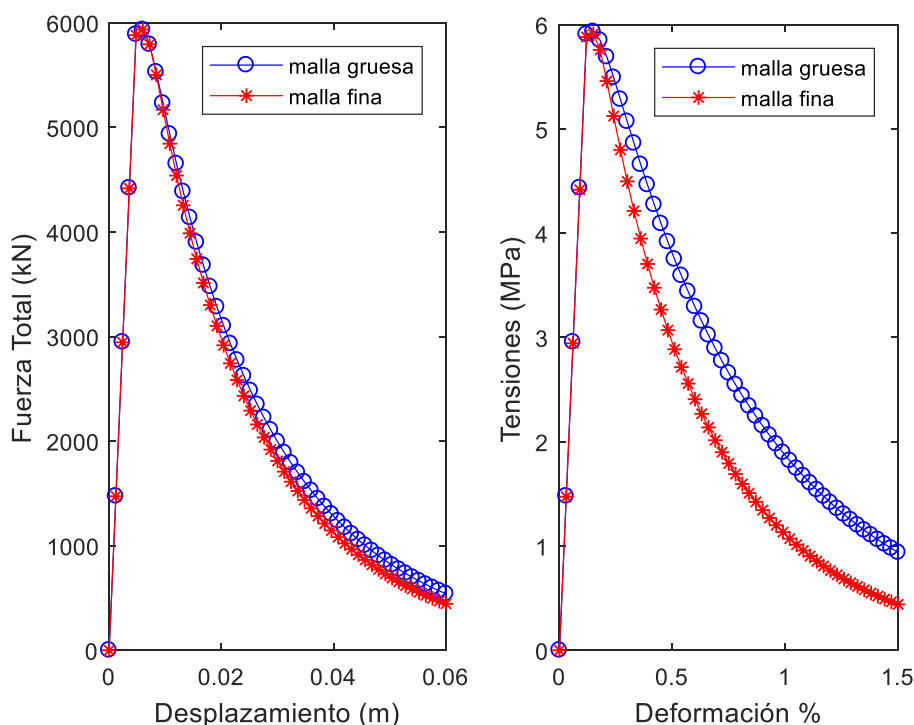
Sin embargo, puede comprobarse que este efecto que, por otro lado, es inherente al uso de modelos de daño continuo locales, no impide calcular con independencia de la malla utilizada el comportamiento mecánico global de la estructura. Para comprobar este hecho aplicaremos la herramienta generada a una placa<sup>2</sup> sometida al mismo ensayo uniaxial de tracción y del mismo material cuyas propiedades se recogen en la Tabla 6-1 y, se utilizarán los dos mallados que se presentan en la siguiente figura:



**Figura 6.5. Esquema de las dos mallas utilizadas. Malla fina (derecha) y malla gruesa (izquierda)**

Representado las curvas fuerza total-desplazamiento y tensión-deformación se obtienen las siguientes figuras:

<sup>2</sup> El área transversal de la placa es  $1 \text{ m}^2$ .



**Figura 6.6. Curva fuerza total-desplazamiento (izquierda) y tensión-deformación (derecha)**

Queda probado que mientras que diferentes mallas producen distribuciones de tensiones diferentes, la coincidencia de las curvas globales muestra la independencia del modelo con respecto a la malla utilizada, cuando se utilizan los modelos de daño que se están describiendo en este apartado.

Este hecho que conforma la principal limitación de los modelos de daño local lleva parejo que no se pueda, utilizando este tipo de modelos, estudiar, en general, el detalle tensional de las zonas donde se encuentran los núcleos de daño.

### Estados de tensión generalizados

El deseo de estudiar estados de carga generalizados que vayan más allá del ensayo de tracción que se ha planteado hasta ahora, requiere modificar tanto las funciones umbrales de daño, dadas por (6-19), como las formas funcionales del daño dadas por (6-11) y (6-12). La modificación consiste en poder diversificar las ramas de evolución de las tensiones en dos, una para los procesos de compresión y otra para los procesos de tracción.

De esta manera, la máxima carga permitida a tracción será  $\sigma_{trac}^{max}$  mientras que la máxima carga permitida a compresión será  $\sigma_{comp}^{max}$ . Estos dos parámetros son propiedades del material bajo estudio. La relación entre ellas se define mediante el parámetro  $N$ :

$$N = \frac{\sigma_{comp}^{max}}{\sigma_{trac}^{max}} \quad (6-26)$$

Así, el límite en el primer umbral de daño, dado en (6-20), se redefine a partir del máximo estado de compresión permitido:

$$c^{max} = \frac{\sigma_{comp}^{max}}{\sqrt{E_{11}}} \quad (6-27)$$

Las constantes  $A$  expresadas en (6-21) y (6-22) se redefinen a partir de  $N$ :

$$A = \begin{cases} \frac{1}{\frac{g_f}{c^{max^2}} N^2 - \frac{1}{2}} & \text{(exponencial)} \\ -\frac{c^{max^2}}{2g_f N^2} & \text{(lineal)} \end{cases} \quad (6-28)$$

La modificación que permite, en la función umbral, considerar cualquier estado generalizado consiste en una función lineal  $\varphi(r)$  que pondera el factor  $N$ , dado en (6-26), y que premultiplica a la función umbral dada en (6-19). Así:

$$\begin{aligned} f(\sigma_o) &= \varphi(r) \sqrt{\varepsilon C_o \varepsilon} \\ \varphi(r) &= rN + (1 - r) \end{aligned} \quad (6-29)$$

Esta función  $\varphi(r)$  valdrá  $N$  en un estado de tracción pura y valdrá uno en un estado de compresión pura siempre que la variable independiente  $r$  valga uno y cero respectivamente. La forma funcional de  $r$  que se utiliza en este trabajo está tomada de [23] y permite considerar no sólo los estados de carga de tracción y compresión puros sino también cualquier estado intermedio. Dicha función adquiere la forma:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (6-30)$$

Donde  $\sigma_i$  representa el autovalor  $i$  del estado tensional no degradado dado por el tensor  $\sigma_o$  de un punto de cuadratura cualquiera y  $\langle . \rangle$  representa la función de McAully definida según:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} [x + |x|]$$



Esta función toma un valor nulo cuando el autovalor es negativo y vale el propio autovalor cuando éste es positivo. Al tener en cuenta esto último, es fácil ver que un estado de compresión pura (que tendrá todos sus autovalores nulos salvo uno que será negativo) hará valer cero la función  $r$ , en (6-30), mientras que valdrá uno para un estado de tracción pura (donde todos sus autovalores serán nulos salvo uno que será positivo).

## Tensor constitutivo tangente

En el proceso de cálculo dentro de un esquema de elementos finitos se hace necesario, tal y como se expuso en el capítulo cuarto, el cálculo de un tensor tangente constitutivo que permita construir la matriz de rigidez global de la estructura.

Mientras que la expresión del tensor secante, que proporciona el modelo de daño que se describe en este capítulo y que también se puede utilizar para construir la matriz de rigidez global de la estructura, ya se ha proporcionado en (6-1), aún no se ha planteado ninguna metodología que permita calcular el tensor tangente.

El disponer de este tensor cuya definición se proporcionó en (4.97), se convierte en una ventaja palpable a la hora de acelerar el proceso de convergencia hacia el equilibrio. Un cálculo ajustado de este tensor hará que el bucle exterior del método iterativo converja con menos iteraciones, reduciendo el coste computacional.

Para obtener este tensor se utilizará la estrategia perturbativa mostrada en [28]. El proceso utiliza el hecho de que el modelo constitutivo del material, compuesto a su vez de la relación constitutiva básica dada por  $\sigma = C^T \varepsilon$  y el conocimiento de la evolución del parámetro de daño, permite obtener a partir de las deformaciones y dicho parámetro de daño, el estado tensional de un punto del dominio cualquiera.

El tensor constitutivo tangente, dado en (4.97), se escribía en su notación tensorial:

$$C_{kh}^T = \frac{\partial \sigma_k}{\partial \varepsilon_h}$$

El esquema perturbativo plantea aproximar la relación anterior mediante:

$$(C^T)_h = \frac{\Delta \sigma}{\Delta(\varepsilon_h)} \quad (6-31)$$

Donde se tiene que  $(C^T)_h$  representa la columna  $h$ -ésima del tensor constitutivo tangente que se quiere calcular,  $\Delta(\varepsilon_h)$  representa el incremento de la componente  $h$ -ésima del vector de deformaciones y  $\Delta \sigma$  es el incremento del vector de tensiones cuando se incrementa un valor igual a  $\Delta(\varepsilon_h)$ , la componente  $h$ -ésima del vector de deformaciones. El método

perturbativo propone partir del vector de deformaciones  $\varepsilon$  y del vector de tensiones  $\sigma$  del paso actual de iteración y dar los siguientes pasos:

- En primer lugar y siempre que  $\varepsilon_h \neq 0$ , se asigna un incremento de deformación para la componente  $h$ -ésima según:

$$\Delta(\varepsilon_h) = \varepsilon_h * 10^{-5}$$

- En el caso de que  $\varepsilon_h = 0$ , se tomará:

$$\Delta(\varepsilon_h) = \min\{|\varepsilon_k| * 10^{-5}\} \quad \forall k = 1,6$$

- Se construye el nuevo vector de deformaciones  $\varepsilon'$  modificando sólo su componente  $h$  según:

$$\varepsilon_h' = \varepsilon_h + \Delta(\varepsilon_h)$$

- Se introduce el nuevo vector de deformaciones  $\varepsilon'$  en la función umbral (6-29) y si el criterio de daño (6-2) se verifica, se calcula mediante las relaciones (6-11) o (6-12), según corresponda, el nuevo parámetro de daño  $d$ . Finalmente, mediante (6-1) se obtiene el nuevo vector de tensiones tras la perturbación  $\sigma'$ .
- Se obtiene el incremento del vector de tensiones mediante:

$$\Delta\sigma = \sigma' - \sigma$$

- Mediante (6-31) se obtiene la columna  $h$ -ésima del tensor constitutivo tangente.

Este proceso sigue para todas las columnas de  $C^T$ . En algunos casos, es posible que la perturbación para las deformaciones  $\Delta(\varepsilon_h)$  que se calcula mediante el método propuesto pueda ser extremadamente pequeña comparada con el valor del incremento del vector de tensiones  $\Delta\sigma$  que ésta produce. En estos casos, la relación (6-31) producirá una indeterminación. Para paliar este hecho, tras obtener la perturbación según los dos primeros pasos del esquema anterior, se deberá asegurar el cumplimiento de la siguiente condición:

$$\Delta(\varepsilon_h) > \max\{|\varepsilon_k| * 10^{-10}\} \quad \forall k = 1,6 \quad (6-32)$$

En caso contrario, se asigna a  $\Delta(\varepsilon_h)$ , el valor dado en el miembro derecho de la inecuación (6-32). El método que se acaba de describir proporciona aproximaciones muy razonables al tensor tangente constitutivo mejorando, en general, la convergencia. Además, tiene la ventaja de ser independiente de la ecuación constitutiva que caracteriza al material.

### 6.3. Esquema del modelo de daño

El modelo de daño que se ha descrito en este capítulo permite modelar el proceso de degradación de la fibra y la matriz de forma independiente. Sólo es necesario proporcionar la tenacidad a fractura, las propiedades mecánicas no degradadas y las máximas tensiones permitidas a tracción y compresión de cada uno de los componentes del material compuesto.

Este modelo de daño debe ir integrado dentro de la teoría de mezclas expuesta en el capítulo anterior. En concreto, el modelo de daño debe ejecutarse en el paso cuarto del esquema iterativo dado en la Figura 5.6 y permite obtener, a partir de las deformaciones, los parámetros de daño, las tensiones degradadas y los tensores secante y/o tangente degradados para cada uno de los componentes del material compuesto.

Dado que el método de daño es explícito se puede obtener directamente el parámetro de daño e integrar directamente las tensiones sin tener que plantear un esquema iterativo. El proceso aparece recogido en la siguiente figura:

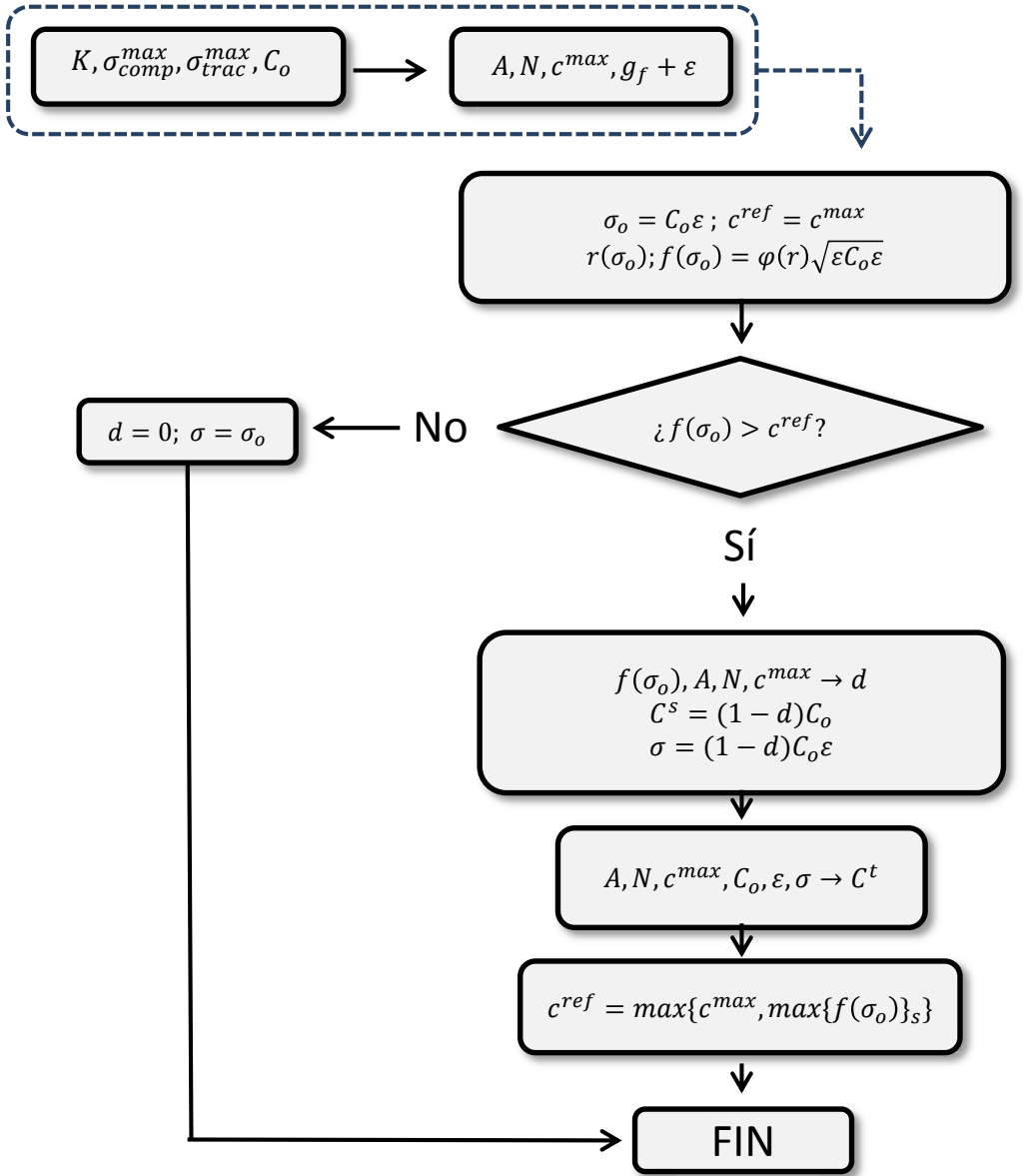


Figura 6.7. Diagrama de flujo del modelo de daño

El método que se describe en la figura requiere el cálculo previo de  $N$ ,  $c^{max}$ ,  $g_f$  y  $A$  a partir de la tenacidad a fractura  $K$ , las máximas cargas a tracción  $\sigma_{trac}^{max}$  y compresión  $\sigma_{comp}^{max}$  y las propiedades mecánicas sin degradar recogidas en la ley de comportamiento  $C_o$ . Para ello se utilizarán respectivamente (6-26), (6-27), (6-25) y (6-28). Para el cálculo de  $g_f$  es necesario definir, para cada elemento finito, una magnitud de referencia que lo acote. En este caso, se utilizará la raíz cúbica del volumen de dicho elemento. Los pasos, en cada uno de los bloques que se muestran en la Figura 6.7, se describen a continuación:

- Utilizando los valores de  $N$ ,  $c^{max}$ ,  $g_f$  y  $A$  y la deformación del componente  $\varepsilon$  se evalúa el estado de tensiones sin degradar  $\sigma_o$  usando que éste es igual a  $C_o\varepsilon$ . Con el tensor de tensiones no degradado se evalúa  $r$  según (6-30) y a su vez  $f(\sigma_o)$  según (6-29). Además, se asocia a  $c^{ref} = c^{max}$ .
- Se compara el valor  $f(\sigma_o)$  con el primer umbral de daño  $c^{ref}$ . Si  $f(\sigma_o)$  no supera a  $c^{ref}$ , el proceso termina y no habrá daño, de forma que  $d = 0$  mientras que la tensión será igual a la no degradada  $\sigma = \sigma_o$ . En caso contrario, se activa el criterio de daño y se pasa al siguiente paso.
- A partir de  $f(\sigma_o)$ ,  $c^{max}$ ,  $A$  y  $N$  se obtiene el parámetro de daño  $d$  utilizando (6-11) para el caso de asumir una evolución exponencial o (6-12) en el caso de asumir una evolución lineal. El tensor constitutivo secante  $C^s$  se obtiene a partir de  $(1 - d)C_o$  mientras que la tensión en el espacio degradado se obtiene a partir de (6-1).
- Partiendo de las deformaciones y tensiones del elemento,  $\varepsilon$  y  $\sigma$ , y también de  $N$ ,  $c^{max}$ ,  $g_f$  y  $A$  se obtiene, siguiendo el proceso descrito en el apartado inmediatamente anterior, el tensor tangente constitutivo  $C^T$  que permitirá obtener la matriz de rigidez global de la estructura.
- Se actualiza el umbral de daño al máximo valor alcanzado por  $f(\sigma_o)$  en toda la historia de carga del proceso, es decir  $c^{ref} = \max(c^{max}, \max\{f(\sigma_o)\}_s)$ .

Tras todo el proceso descrito, se tiene el estado tensional del material bajo estudio que ha sido degradado según el modelo de daño que se ha propuesto. Este proceso debe ejecutarse para todos los puntos de cuadratura de todos los elementos de la malla que se haya considerado. Debe aplicarse a todos los materiales constituyentes del material compuesto, en concreto, para la fibra y la matriz y tiene que ejecutarse a la par que se ejecuta la teoría de mezclas en cada iteración de equilibrio. La aplicación a cada material constituyente permite seguir el proceso de degradación de la fibra y la matriz por separado y construir las propiedades del material compuesto a partir de las propiedades degradadas de sus constituyentes.

Este modelo de daño puede ser modificado a conveniencia para ampliar el abanico de problemas que se pueden estudiar. Por ejemplo, se podrían proponer otras funciones umbrales de daño diferentes a la de Simo-Ju. La forma modular de implementación que se ha utilizado hace que el cuerpo fundamental de todo el código desarrollado pueda ser reutilizado si se cambia sólo la parte correspondiente a la modificación que se quiera hacer.

# Bibliografía

- [1] Chen, W.F., *Plasticity for structural engineers*, Springer, 1988.
- [2] Kachanov, L. M., *Foundations of the theory of plasticity*, Amsterdam, Netherlands: Applied mathematics and mechanics. North-Holand Publishing Company, 1971.
- [3] Oller, S., "B5. Modelos independientes del tiempo," in *Dinámica No Lineal*, Barcelona, 2001, pp. 5-24 a 5-28.
- [4] París, F., "9. Criterios de Plastificación," in *Teoría de la Elasticidad*, 2000, pp. 345-377.
- [5] Oller, S., "B5. Modelos independientes del tiempo," in *Dinámica No Lineal*, 2001, pp. 5-29 a 5-41.
- [6] Kachanov, L. M., "On the creep fracture time," *Izv. Akad Nauk USSR Otd. Tekh.*, vol. 8, pp. 26-31, 1958.
- [7] Krajcinovic, D., *Damage Mechanics*, North Holland, Amsterdam, 1996.
- [8] Chaboche, J.-L., "A continuum damage theory with anisotropic and unilateral damage," *Recher. Aérospat.*, vol. 2, pp. 139-147, 1995.
- [9] Carol, I., Rizzi, E. & Willam, K., "On the formulation of anisotropic elastic degradation. I. Theory based on a pseudoalgorithmic damage tensor rate," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 38, pp. 491-518, 2001.
- [10] Luccioni, B. & Oller, S., "A directional damage model.," *Comput. Methods Applied Mech. Eng.*, vol. 192, pp. 1119-1145, 2003.
- [11] Simo, J.C. & Ju, J.W., "Strain and stress-based continuum damage models-I," *Formulat. Int. J. Solids Struct.*, vol. 23, no. 23, pp. 821-840, 1987.
- [12] Ortiz, M., "A constitutive theory for inelastic behaviour of concrete," *Mech. Mater.*, vol. 4, pp. 67-93, 1985.
- [13] Barbero, E.J. & De Vivo, L., "A Constitutive Model for Elastic Damage in Fiber-Reinforced PMC Laminae," *International Journal of DAMAGE MECHANICS*, vol. 10, pp. 73-93, 2001.
- [14] Rosen, B.W., "The Tensile Failure of Fibrous Composites," *AIAA Journal*, vol. 2, no. 11, pp. 1885-1911, 1964.
- [15] Barbero, E.J., "Prediction of Compression Strength of Unidirectional Polymer Matrix Composites," *Journal of Composite Materials*, vol. 5, no. 32, pp. 483-502, 1998.
- [16] Barbero, E.J., "An Inelastic Damage Model for Fiber Reinforced Laminates," *Journal of*

*Composite Materials*, vol. 36, no. 8, pp. 941-962, 2002.

- [17] Maimí, P., Camanho, P.P., Mayugo, J.A. & Dávila, C.G., "A continuum damage model for composite laminates: Part I - Constitutive model," *Mechanics of Materials*, vol. 39, pp. 897-908, 2007.
- [18] Maimí, P., Camanho, P.P., Mayugo, J.A. & Dávila, C.G., "A continuum damage model for composite laminates: Part II - Computational implementation and validation," *Mechanics of Materials*, vol. 39, pp. 909-919, 2007.
- [19] Wang, L., Zheng, C., Luo, H., Wei, S. & Wei, Z., "Continuum damage modeling and progressive failure analysis of carbon fiber/epoxy composite pressure vessel," *Composite Structures*, vol. 134, pp. 475-482, 2015.
- [20] Tan, J. L. Y., Deshpande, V. S. & Fleck, N. A., "Prediction of failure in notched carbon-fibre-reinforced-polymer laminates under multi-axial loading," *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 374, 2016.
- [21] Liu, P. F. & Zheng, J. Y., "Recent developments on damage modeling and finite element analysis for composite laminates: A review," *Materials and Design*, vol. 31, pp. 3825-3834, 2010.
- [22] Kachanov, L. M., Introduction to continuum damage mechanics, Dordrecht, Netherlands: Mechanics of elastic stability. , 1986.
- [23] Oliver, J.; Cervera, M.; Oller, S. & Lubliner, J., "Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete," in *Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Austria, 1990.
- [24] Oller, S., "10.2 Modelo de daño isótropo," in *Fractura mecánica. Un enfoque global*, Barcelona, Publicaciones CIMNE, 2001, pp. 200-208.
- [25] Oller, S., "B5.17 Modelos de daño isótropo," in *Dinámica No Lineal*, Barcelona, 2001, pp. 5-67 a 5-78.
- [26] Griffith, A., "The phenomena of rupture and flaw in solids," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, pp. 163-198, 1921.
- [27] Bazant, Z. P. & Oh, B.H., "Crack band theory for fracture of concrete," *Mater. Struct.*, no. 16, pp. 155-177, 1983.
- [28] Martínez, X.; Oller, S. & Barbero E., "Caracterización de la delaminación en materiales compuestos mediante la teoría de mezclas serie/paralelo," *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 3, no. 27, pp. 192-193, 2010.



## 7. Análisis de Laminados con Concentradores de Tensión



## 7.1. Introducción

La necesidad de conformar estructuras mediante el ensamblaje de diferentes piezas hace necesaria la presencia de agujeros, remaches y uniones que introducen concentradores de tensión. Por este motivo, es preciso estudiar a nivel tensional, el efecto que la presencia de agujeros tiene en la capacidad resistente de la estructura.

La influencia de parámetros como el espesor de los laminados, su secuencia de apilamiento, la posición relativa del agujero en el laminado y sus dimensiones hace que el problema sea complejo de abordar. A lo largo del tiempo, diversos autores han estudiado este problema y la presencia de trabajos sobre esta materia es abundante en la literatura.

Por ejemplo, en [1] se estudia, en laminados cuasi-isótropos con agujero, la capacidad de resistencia utilizando diferentes secuencias de apilamiento, diferentes dimensiones de la probeta en el plano de carga y diferentes diámetros del agujero. Se muestra que la resistencia y el mecanismo de fallo preferente depende de si el laminado está conformado por varios sublaminados de espesor constante ( $[45, 90, -45, 0]_{ns}$ ) o si por el contrario está conformado por una misma secuencia de apilamiento compuesta por láminas con espesores crecientes ( $[45_n, 90_n, -45_n, 0_n]_s$ ). La influencia de estos mismos parámetros se estudia, también, en [2] utilizando un modelo de daño continuo que se compara con otros métodos (Mecánica de la Fractura Elástica Lineal, '*point stress method*' y '*inherent flaw model*') para predecir la resistencia y la evolución de la fractura antes del fallo, encontrándose que el modelo de daño continuo produce mejores resultados.

Los modelos numéricos cohesivos también se aplican para predecir la resistencia a la fractura translaminar en laminados con agujero [3] sometidos a cargas de tracción. Este tipo de modelos predicen apropiadamente la dependencia de la resistencia a fallar por despegue de la fibra con respecto al espesor. Por otro lado, en [4] se establece que el tamaño del agujero también tiene efectos en la carga de rotura de los laminados, siendo la carga de rotura proporcional al tamaño de los mismos cuando se aumentan los espesores de las láminas. Por el contrario, el aumento del número de láminas (aumentando la cantidad de sublaminados) vuelve inversa la relación entre el tamaño del agujero y la resistencia. Asimismo, la delaminación en el borde libre del agujero es el mecanismo de daño predominante en estos casos.

Los niveles de daño ante tracción, en aquellos laminados cuyas láminas presentan espesores más grandes, son menores que los que se encuentran en aquellos laminados del mismo espesor, pero conformados por una cantidad mayor de sublaminados [4], cuando se mantiene el tamaño del agujero. Este mismo resultado también se puede obtener con el denominado '*grid method*' [5]. Dicho método permite, a partir de la determinación del campo de desplazamientos mediante técnicas ópticas, identificar la presencia de grietas que producen no linealidades en el comportamiento del laminado [6].

El material de los laminados evidentemente afecta al estado tensional y a los mecanismos de fallo. Mientras que los niveles tensionales, alrededor del agujero, en un laminado reforzado con fibra de carbono son mayores que en uno reforzado con fibra de vidrio, éste último presenta una mayor deformación última de rotura [7].

En [8], se estudia la influencia del diámetro del agujero cuando se mantiene constante la relación entre dicho diámetro y el ancho de la probeta. Se estudia una probeta a tracción y otra a compresión para dos secuencias de apilamiento distintas utilizando métodos diferentes. Se encuentra que los métodos basados en la Mecánica de la Fractura producen mejores resultados que otros métodos para determinar la resistencia como el *'point and average stress method'*, el *'inherent flaw model'* o el uso de cohesivos.

En el caso de laminados cuasi-isótropos con agujero conformados por apilamiento de sublaminados, la relación entre la resistencia y las dimensiones de la probeta es inversa cuando se mantiene constante la relación entre el radio y el ancho de la probeta, mientras que esta tendencia se invierte cuando los laminados se conforman mediante láminas de espesor creciente [9]. En el mismo trabajo, se estudian diferentes secuencias de apilamiento y espesores para casos de carga de tracción.

La cantidad de parámetros de los que depende el problema lleva a intentar minimizar la dependencia de los modelos utilizados de dichos parámetros. En ese sentido, en [10] se propone un modelo que considera que la dependencia de la resistencia de las fibras con el espesor sigue una distribución típica de Weibull, evitando el uso de parámetros empíricos a menudo difíciles de obtener. Esta propuesta permite estimar adecuadamente la resistencia a tracción de laminados cuasi-isótropos con agujero.

Otro ejemplo de la complejidad que conlleva el uso de materiales compuestos, lo constituye el hecho de que los modelos que se utilizan para estudiar casos a tracción no son válidos cuando se quieren estudiar estados de carga a compresión. En este caso, aparecen fenómenos de micropandeo en aquellas láminas que se encuentran orientadas en la dirección de la carga, produciéndose en éstas el inicio de la propagación de daño por delaminación en los bordes libres del agujero ([11] o [12]).

También se ha observado que, mientras que el micropandeo de las láminas con fibras en la dirección de la carga gobierna el fallo en laminados con agujero, los criterios habituales de máxima tensión o deformación crítica sirven para predecir el fallo de laminados sin agujero [13]. En estos casos, la carga de rotura resulta ser independiente de la secuencia de apilamiento cuando los laminados no presentan agujero.

Por otro lado, la presencia de múltiples agujeros suficientemente cercanos da lugar a fenómenos de interferencia que pueden amplificar la concentración de tensiones, adelantando el fallo del laminado [14]. De nuevo, en este trabajo, se observa que el fallo se inicia en las láminas con inclinación nula con respecto a la carga. Este mecanismo, provocado por el micropandeo de las fibras, produce una delaminación en los bordes libres del agujero que se inicia aproximadamente al 80% de la carga total de rotura.

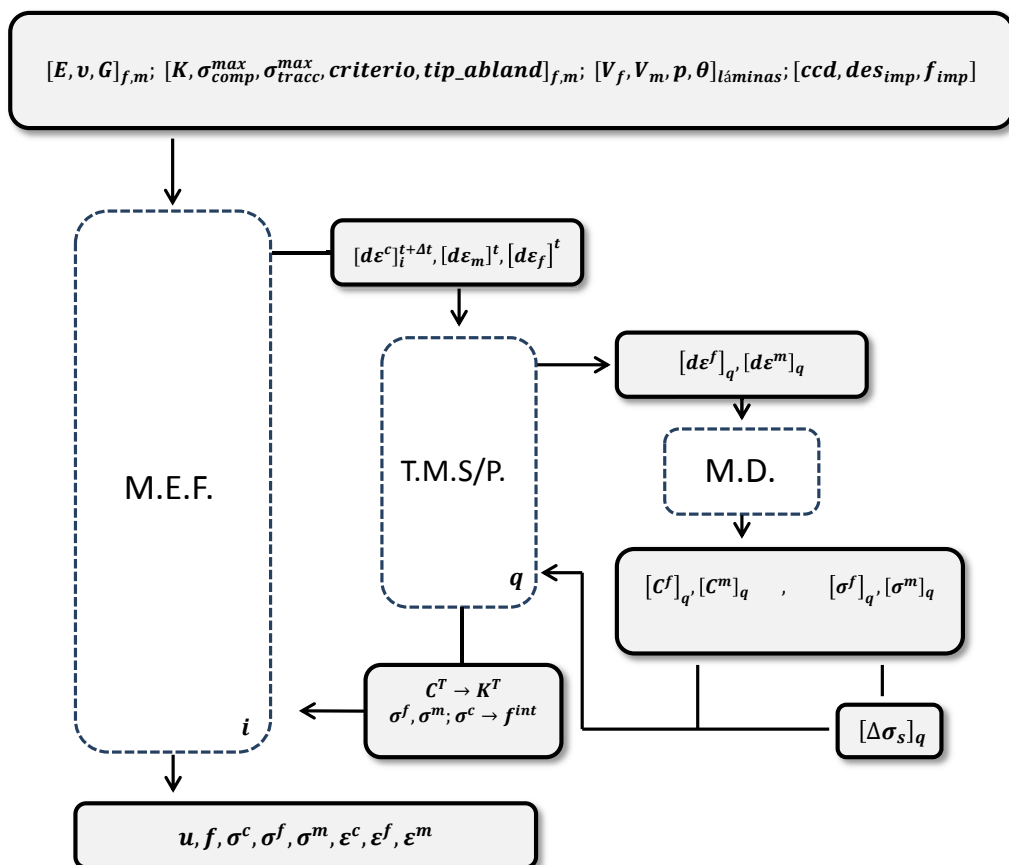
Los mecanismos que transmiten la delaminación a través de las diferentes láminas dependen de la rigidez interlaminar y su magnitud. Un estudio pormenorizado de estos fenómenos en ensayos de compresión, aplicados a probetas con agujero, se puede encontrar en [15]. También es posible emplear modelos cohesivos para modelar efectos como el bloqueo por capas o la propagación del daño en las inmediaciones de los bordes libres de un agujero [16]. En dicha referencia se analiza el daño por micropandeo en presencia de cargas compresivas.

El uso de los laminados en aplicaciones estructurales reales somete al laminado a estados de carga mucho más complejas que simplemente un ensayo de tracción o compresión uniaxial, complicando mucho más el análisis de los diferentes mecanismos de fallo y su influencia con la geometría de la probeta. Un estudio para un estado de tracción/compresión biaxial para laminados cruzados se puede encontrar en [17].

En el presente capítulo, se hace una aproximación al estudio de laminados con agujero sometidos a un estado de compresión uniaxial y con una secuencia de apilamiento concreta. Para ello, sabiendo que el mecanismo de fallo predominante es el micropandeo de las fibras a cero en las inmediaciones del borde libre del agujero, se propone utilizar un modelo fenomenológico, en un soporte de elementos finitos, constituido por el modelo de daño continuo expuesto en el capítulo anterior. Asimismo, se propone como ley constitutiva para el material compuesto el uso de la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo desarrollada en el Capítulo 5 de este trabajo.

## 7.2. Esquema del método

Aunque en los Capítulos 4, 5 y 6 se expusieron en detalle los esquemas de funcionamiento de los diversos modelos empleados en este trabajo, se hace necesario precisar la interrelación entre ellos. Principalmente es de interés especificar la relación entre las variables que, siendo de salida en un módulo concreto, se transforman en variables de entrada en otro de los módulos. Estas relaciones aparecen representadas en la siguiente figura:



**Figura 7.1. Esquema general del modelo fenomenológico**

Desde un punto de vista general, el funcionamiento del método se basa en la actuación combinada de dos bucles de cálculo que ejecutan los Métodos de Newton-Raphson que se han propuesto. Uno de estos bucles (con índice de iteración  $i$ ) es el exterior que sirve para equilibrar las fuerzas exteriores con las interiores y garantiza que, tras todas las iteraciones, se verifiquen las ecuaciones de equilibrio interno en cada uno de los instantes de tiempo. El otro bucle (con índice de iteración  $q$ ) que se denomina interior garantiza que, en cada una de las iteraciones del bucle exterior, se equilibren las tensiones serie de la fibra y la matriz,

cumpléndose las relaciones que impone la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo. Estos bucles deben ejecutarse para todos los elementos finitos que contenga el modelo y todos los puntos de cuadratura de cada uno de ellos. A su vez, en cada uno de los nodos del modelo habrá definidos vectores de desplazamientos y fuerzas nodales.

Tal y como se puede observar en la Figura 7.1, las **variables de entrada** al bucle exterior son:

- Las constantes mecánicas  $E, \nu, G$  de la fibra y la matriz consideradas como materiales homogéneos e isotropos.
- Las constantes que permiten definir los modelos de daño para la fibra y la matriz. Éstas son las tenacidades a fractura  $K$  y las tensiones máximas a compresión  $\sigma_{comp}^{max}$  y tracción  $\sigma_{tracc}^{max}$  de la fibra y la matriz. A continuación, se definen dos parámetros para cada constituyente. Uno denominado '*criterio*' que permite discernir si se quiere utilizar el tensor secante o tangente para construir las matrices de rigidez<sup>1</sup>. El otro parámetro llamado '*tipo\_de\_abland*' permite elegir, para el criterio de daño, entre funciones de ablandamiento exponencial o lineal.
- El siguiente bloque de variables de entrada hace referencia a los parámetros que definen la lámina. En este método, se define un conjunto de parámetros para cada lámina con diferente orientación de la secuencia de apilamiento. Estos parámetros son las fracciones volumétricas de la fibra  $k_f$  y la matriz  $k_m$ , un vector  $p$  de seis componentes que permite seleccionar qué componentes de tensión y deformación se comportarán en paralelo y cuáles en serie<sup>2</sup>. En esta aplicación sólo la componente ' $x$ ' admitirá un comportamiento en paralelo<sup>3</sup>.
- El siguiente bloque contiene las condiciones de contorno del problema. En primer lugar, se incluye una matriz llamada *ccd* que contiene tantas filas como nodos tiene el modelo y tres columnas. En la primera columna se incluye la numeración del nodo, en la segunda se tiene un número de tres cifras (una por cada dirección espacial) que pueden ser 1 ó 0 en función de si hay condición de contorno en desplazamiento diferente de cero impuesto o no sobre el grado de libertad correspondiente, en tercer lugar, el valor del desplazamiento impuesto *des\_imp*. Por último, se incluye un

<sup>1</sup> En general, el tensor tangente permite una convergencia con menos iteraciones del bucle exterior, aunque éstas invierten más tiempo de cálculo. Por otro lado, el uso del tensor secante es más estable y suele converger a la solución independientemente de las características de convexidad del problema, aunque su uso implicará un mayor número de iteraciones.

<sup>2</sup> Introduciendo 1 se adoptará comportamiento en paralelo mientras que 0 significará comportamiento serie.

<sup>3</sup> Dado que estos datos se aportan en ejes locales, esta elección implica comportamiento en paralelo en la dirección de la fibra y comportamiento en serie en las direcciones restantes. Sin embargo, mediante la modificación de este vector se puede utilizar el mismo método para aplicar la Teoría de Mezclas Clásica, seleccionando todas las componentes en paralelo o la Teoría Clásica Inversa, seleccionando todas las componentes en serie, También será factible cualquier planteamiento intermedio.

vector que contiene el vector de cargas externas (*factor\_de\_carga*) y que tiene tantas filas como nodos por tres (grados de libertad por nodo) ordenados según la numeración global. Cada fila contiene el valor de la carga impuesta en cada grado de libertad.

Por otro lado, las **variables de salida** del bucle exterior son:

- Los vectores nodales de desplazamiento y fuerza,  $u$  y  $f$ .
- Las tensiones de todos los puntos de cuadratura correspondientes a todos los elementos del modelo. Estas tensiones son las correspondientes a la fibra  $\sigma^f$ , matriz  $\sigma^m$  y al material compuesto  $\sigma^c$ .
- Análogamente, las deformaciones de todos los puntos de cuadratura correspondientes a todos los elementos del modelo. Estas deformaciones son las correspondientes a la fibra  $\varepsilon^f$ , matriz  $\varepsilon^m$  y al material compuesto  $\varepsilon^c$ .

Dentro del bucle exterior denominado *M.E.F.* en la Figura 7.1, se encuentra alojado el bucle interior que corresponde al método iterativo de la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo (denominado *T.M.S.P.* en la Figura 7.1). El bucle interior deberá ser ejecutado en cada iteración  $i$  del bucle exterior y tiene como **variables de entrada** las siguientes magnitudes:

- Las componentes de deformación del material compuesto en el instante  $t + \Delta t$  en la iteración  $i$  del bucle exterior  $[d\varepsilon^c]_i^{t+\Delta t}$  de todos los puntos de cuadratura de todos los elementos del modelo.
- Las componentes de deformación de la fibra  $[d\varepsilon_f]^t$  y la matriz  $[d\varepsilon_m]^t$  en el instante  $t$  de todos los puntos de cuadratura de todos los elementos del modelo.

Mientras que las **variables de salida** del bucle interior son:

- El tensor constitutivo tangente  $C^T$ , en el paso  $i$  del bucle exterior, correspondiente a todos los puntos de cuadratura de todos los elementos del modelo. Este tensor permite construir la matriz de rigidez global  $K^T$  para el siguiente paso de iteración del bucle exterior.
- Las componentes de tensión  $\sigma^c$ ,  $\sigma^f$  y  $\sigma^m$ , en el paso  $i$  del bucle exterior, del material compuesto, fibra y matriz de todos los puntos de cuadratura de todos los elementos del modelo. Las tensiones  $\sigma^c$  permiten construir el vector de fuerzas internas nodales  $f^{int}$  para el siguiente paso de iteración del bucle exterior.



Dentro del bucle interior, se encuentra otro bloque denominado *M.D.* que hace referencia al modelo de daño. Tal y como se expuso en el Capítulo 6, la naturaleza explícita del modelo de daño escogido produce que no sea necesario otro método iterativo para obtener las variables del modelo de daño. Este bloque deberá ser ejecutado en cada iteración  $q$  del bucle interior. Las **variables de entrada** del modelo de daño son:

- Las componentes de deformación de la fibra  $[d\varepsilon^f]_q$  y la matriz  $[d\varepsilon^m]_q$  en la iteración  $q$  del bucle interior correspondiente a todos los puntos de cuadratura de todos los elementos del modelo.

Mientras que las **variables de salida** del modelo de daño son:

- Los tensores constitutivos de la fibra  $[C^f]_q$  y la matriz  $[C^m]_q$  correspondientes a la iteración  $q$  del bucle interior y de todos los puntos de cuadratura de todos los elementos del modelo. Estos tensores permitirán construir el tensor constitutivo tangente  $C^T$  correspondiente al material compuesto en la iteración  $i$  del bucle exterior cuando el bucle interior haya convergido.
- Las componentes de tensión de la fibra  $[\sigma^f]_q$  y la matriz  $[\sigma^m]_q$  correspondientes a la iteración  $q$  del bucle interior de todos los puntos de cuadratura y de todos los elementos del modelo. Estas tensiones permitirán construir la diferencia entre las tensiones serie  $[\Delta\sigma_s]_q$  necesaria en el bucle interior. Cuando el bucle interior haya convergido, a partir de estas tensiones, se podrán calcular las tensiones  $\sigma^c$  del material compuesto correspondiente a la iteración  $i$  del bucle exterior.

El método descrito permite obtener, para la fibra, matriz y el material compuesto, tanto los desplazamientos y fuerzas nodales como el valor de las tensiones y deformaciones de todos los puntos de cuadratura de los elementos finitos definidos sobre el laminado bajo estudio cuando han convergido ambos bucles. El método garantiza, por tanto, el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio interno y las relaciones que impone la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo cuando actúa un mecanismo de daño como el que se ha elegido.

### 7.3. Descripción del problema y calibración del modelo fenomenológico

Los modelos fenomenológicos, como el que se utiliza en este trabajo, pueden recoger la física que gobierna los problemas con diferentes grados de detalle. En este apartado, se pretende hacer una primera aproximación al empleo de este tipo de modelos en donde el principal

interés recae en la estimación de las magnitudes globales y para lo que los modelos de daño continuo locales son especialmente apropiados.

En este apartado, se quiere abordar un problema consistente en un laminado simétrico de material compuesto de fibra de carbono T800 (en una fracción volumétrica del 34%) en una matriz de tipo epoxy 924C, formado por 24 láminas (de 0.125 mm de espesor) apiladas según la secuencia  $[(45^\circ, -45^\circ, 0^\circ)_3]_S$ . La probeta bajo estudio (245 x 50 x 3 mm) tiene un agujero central de 5 mm de diámetro. Para validar el modelo, se utilizarán los resultados proporcionados en [14] para el mismo laminado, sometido a un ensayo uniaxial de compresión. En este caso, el proceso de degradación del laminado viene gobernado por el micropandeo de las fibras colocadas en la dirección de la carga, en las inmediaciones del borde libre del agujero, produciéndose fenómenos de delaminación. Este proceso viene seguido de un agrietamiento de la matriz en las láminas con fibras inclinadas. La zona de micropandeo que aparece, a una carga muy cercana a la rotura, crece establemente a la par que la carga aplicada, hasta que se vuelve inestable. Finalmente, el laminado falla produciéndose un fenómeno masivo de agrietamiento de la matriz que produce una superficie de rotura en el plano perpendicular a la dirección de la carga.

En este caso, se estimará la curva tensión remota-deformación que se tiene hasta la rotura del material mediante el ajuste del modelo de daño sólo para la fibra, tratando de simular el proceso de micropandeo que tendrá lugar en las inmediaciones del borde libre del agujero. Dado que la zona dañada por el micropandeo empieza a crecer muy cerca de la carga de rotura del material, se ajustarán los parámetros del modelo para que el daño empiece a producirse también poco antes de la rotura.

Dado que, en este modelo, se parte del conocimiento de las propiedades mecánicas de la fibra y la matriz por separado, así como de los parámetros del modelo de daño y estos no vienen explicitados en [14], se hace necesario un proceso de calibración que permita ajustar las propiedades de la fibra y la matriz a partir de las propiedades de láminas de material compuesto, proporcionadas en la referencia, cuyas fibras se encuentren orientadas a  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . El proceso de calibración se describe en el siguiente apartado.

### Calibración del modelo

En [14], se proporcionan los módulos de Young de láminas sin agujero del mismo material cuyas fibras se encuentran a  $0^\circ$  y a  $90^\circ$ , trabajando a tracción. Dichas propiedades se recogen en la siguiente tabla:

Orientación de la láminas	$E$ (GPa)
$0^\circ$	168
$90^\circ$	9.25

Tabla 7-1. Propiedades del T800/924C a tracción para diversas orientaciones de las fibras en láminas sin agujero [14]

Para obtener valores de partida que permitan ajustar las propiedades mecánicas de la fibra y la matriz<sup>4</sup>, es razonable considerar que cuando la lámina tiene sus fibras orientadas según la dirección de la carga (lámina a  $0^\circ$ ), la fibra y la matriz trabajan en paralelo (condiciones de isodeformación). Análogamente, cabe pensar que cuando la lámina trabaja con sus fibras perpendiculares a la dirección de la carga (lámina a  $90^\circ$ ), su comportamiento responde a una asociación serie de las mismas con la matriz (condiciones de isotensión). Así, se puede escribir:

$$\begin{aligned} E_{0^\circ} &= k_f E_f + k_m E_m \\ E_{90^\circ} &= \frac{k_f}{E_f} + \frac{k_m}{E_m} \end{aligned} \quad (7-1)$$

Donde  $E_f$  y  $E_m$  representan los módulos de Young de fibra y matriz respectivamente. Las expresiones (7-1) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permiten despejar para los módulos de Young de la fibra y la matriz<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} E_f &= 482.189 \text{ GPa} \\ E_m &= 6.1451 \text{ GPa} \end{aligned} \quad (7-2)$$

En [14], se proporcionan las curvas tensión remota-deformación de dos laminados sin agujero con la misma geometría para un ensayo de compresión uniaxial. Uno unidireccional y otro con la secuencia de apilamiento  $[(45^\circ, -45^\circ, 0_2^\circ)_3]_s$ . A partir de estas curvas, y tras un proceso de calibración que parte de los valores dados en (7-2), se ajustan el resto de propiedades mecánicas de la fibra y la matriz de manera que se obtenga una buena aproximación cuando se comparan los resultados experimentales del laminado unidireccional, con los resultados obtenidos con la herramienta. A su vez, utilizando los mismos valores para los parámetros, se valida el ajuste, comparando los resultados para el caso del laminado multidireccional.

Para simular el estado de compresión uniaxial del ensayo, se utilizan unas condiciones de contorno tales que se considera a la lámina empotrada por su lado izquierdo (todos los desplazamientos impedidos) y se imponen desplazamientos negativos en la dirección longitudinal del laminado por su lado derecho. La malla que se propone para el dominio de interés se muestra en la Figura 7.2:

<sup>4</sup> Que se considerarán isotropas. Así mismo, las fracciones volumétricas son  $k_f = 0.34$  y  $k_m = 0.66$ .

<sup>5</sup> Aunque el sistema (7-1) tiene dos soluciones, se ha escogido la que proporciona valores más cercanos a los valores de referencia para los materiales que se manejan.

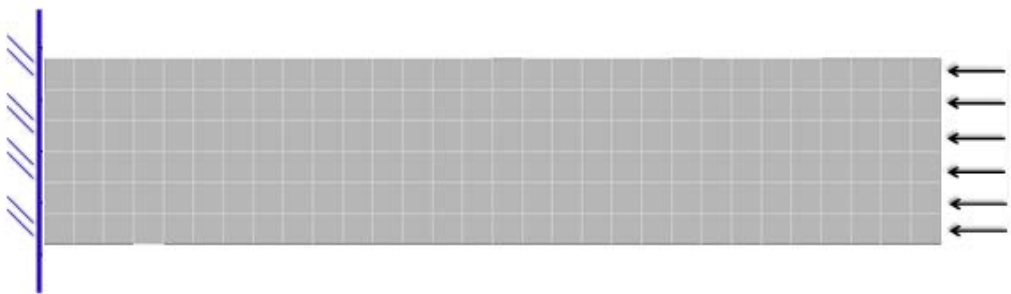


Figura 7.2. Malla y condiciones de contorno propuestas para el laminado sin agujero

Asimismo, se utiliza un elemento finito, para cada lámina, en la dirección del espesor. Un detalle del mallado a lo largo del espesor se muestra en la Figura 7.3:

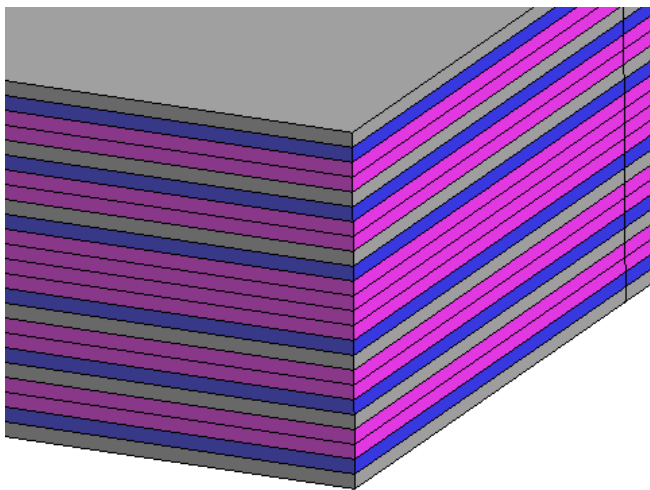


Figura 7.3. Detalle del mallado en el espesor

Cada uno de los colores representados hace referencia a cada una de las orientaciones del laminado multidireccional (gris para las láminas a  $45^{\circ}$ , azul para las láminas a  $-45^{\circ}$  y magenta para las láminas a  $0^{\circ}$ ). Las propiedades mecánicas y del modelo de daño que se han seleccionado para la fibra y la matriz, tras el proceso de calibración, se recogen en la siguiente tabla:

Propiedades	Fibra	Matriz
$E$ (GPa)	400	4.5
$\nu$	0.2	0.39

$G$ (GPa)	166.66	4.044
$K$ (GPa*m)	0.42	--
$\sigma_{comp}^{max}$ (GPa)	4.45	--
$\sigma_{tracc}^{max}$ (GPa)	5	--
Tipo de ablandamiento	exponencial	--
Tipo de tensor	tangente	--

Tabla 7-2. Propiedades de la fibra y la matriz en el modelo propuesto

La comparativa entre los valores que se obtienen con los resultados experimentales sacados de [14], para los laminados unidireccionales y multidireccionales, se muestra en la Figura 7.4:

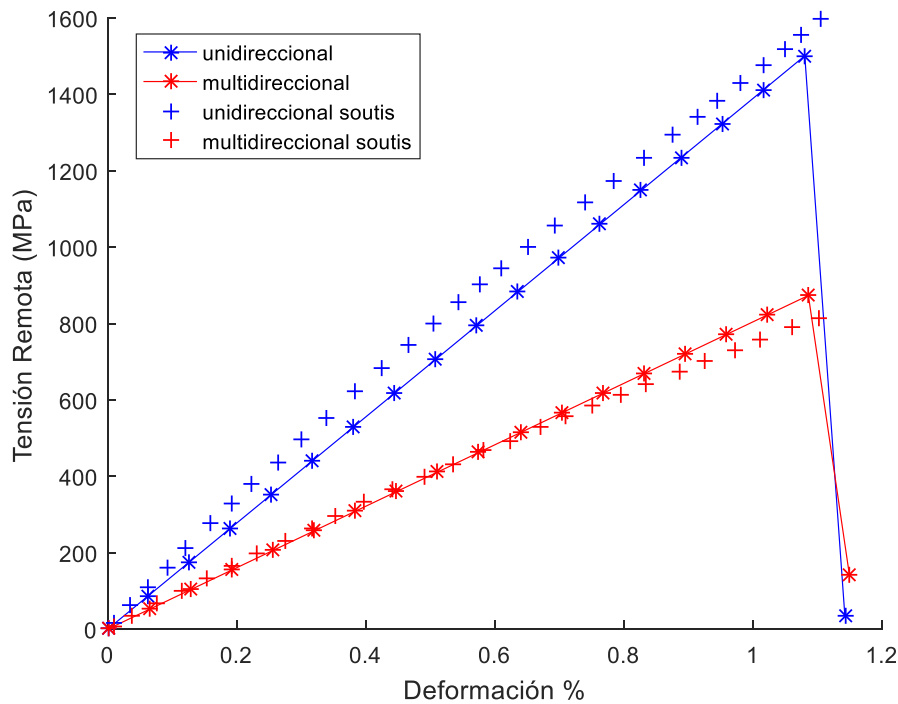


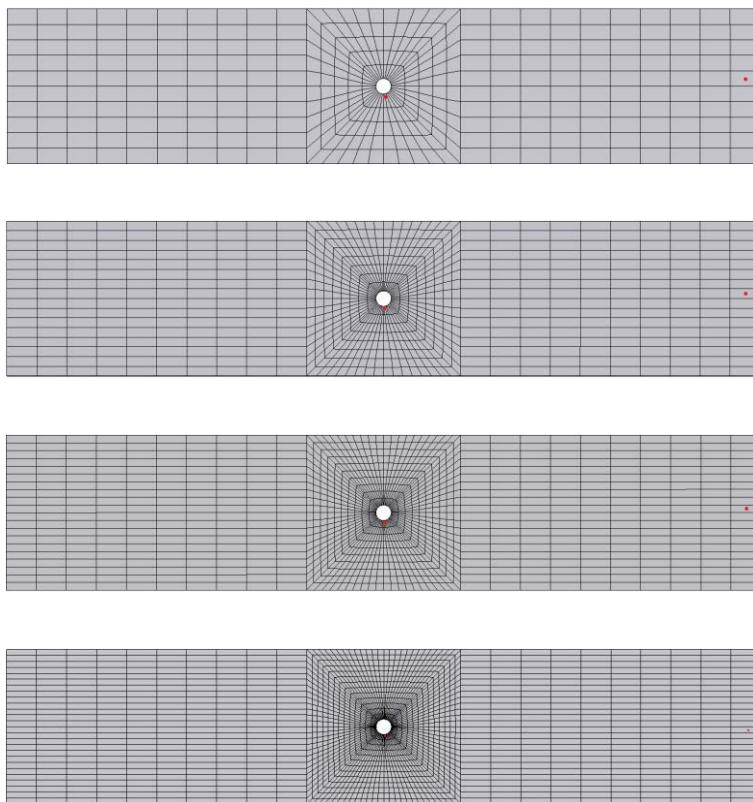
Figura 7.4. Comparación de las curvas Tensión Remota-Deformación para laminados sin agujero con los resultados extraídos de [14]

Los valores de la simulación se muestran hasta que cae la carga aplicada como consecuencia del desarrollo del daño, aunque en la referencia sólo se hayan proporcionado los datos hasta la rotura. El hecho de que el modelo, que utiliza los parámetros calibrados para el ensayo correspondiente al laminado unidireccional, reproduzca los resultados experimentales correspondientes al laminado multidireccional permite concluir que la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo en conjunto con el modelo de daño continuo isótropo que se ha propuesto sirve para modelar la ortotropía propia de laminados con fibras colocadas según orientaciones

diferentes. Así, la ortotropía inherente a estos fenómenos puede modelarse sin la necesidad de utilizar tensores de daño de segundo orden [18] o cuarto orden [19] que implicaría manejar una cantidad mayor de variables internas que aumentan el coste computacional.

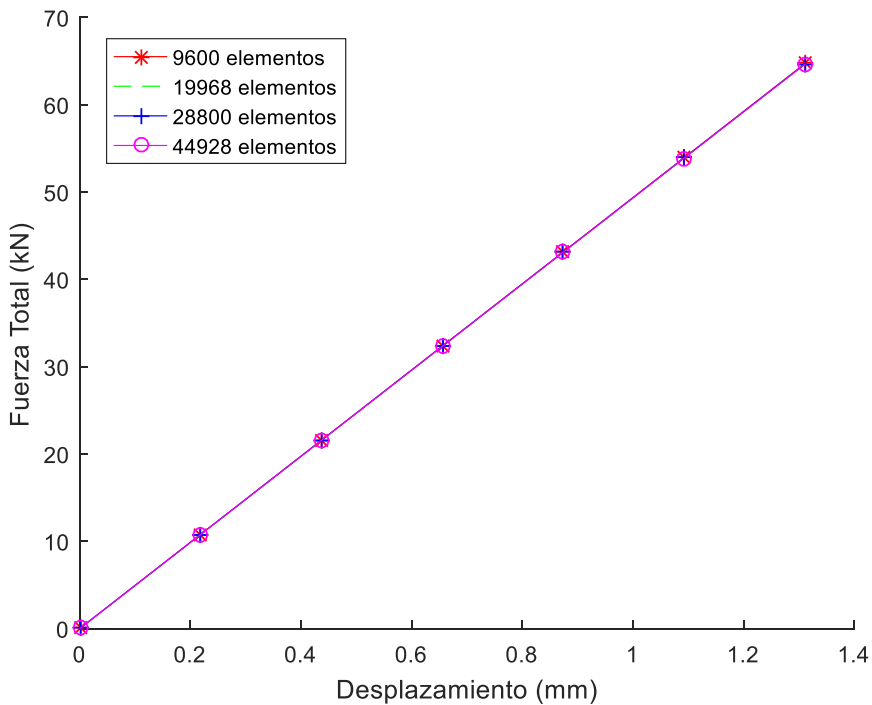
### Estudio de sensibilidad de malla

Tras el proceso de calibración que se acaba de hacer, se quiere validar el modelo comparando, en el caso del laminado multidireccional con agujero, las magnitudes globales obtenidas con los resultados experimentales proporcionados en [14]. Dado que el modelo de daño que se propone depende del tamaño de la malla utilizada, se hace necesario hacer un estudio que permita evaluar la influencia de ésta en las magnitudes globales que se quieren estudiar. Para ello, se proponen cuatro mallados diferentes con un número creciente de elementos que se muestran en la Figura 7.5:



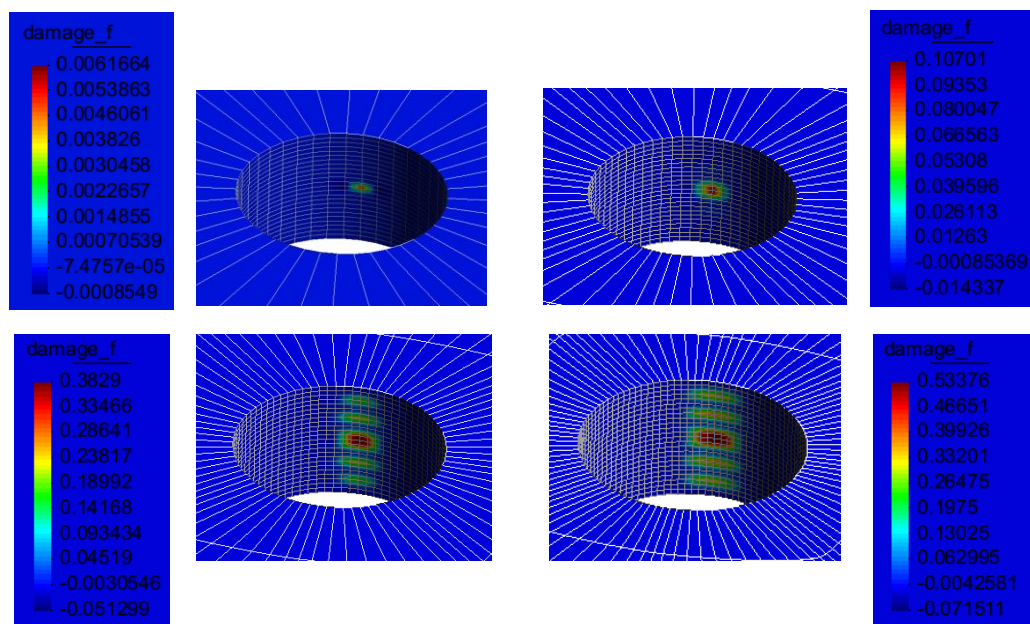
**Figura 7.5. Diferentes mallas utilizadas. De arriba a abajo: 9600 elementos, 19968 elementos, 28800 elementos y 44928 elementos**

La curva fuerza total-desplazamiento que se obtiene para las diferentes mallas se muestra a continuación:



**Figura 7.6. Curvas Fuerza Total-Desplazamiento para el laminado con agujero y diferentes mallas**

Las curvas representadas en la Figura 7.6 son coincidentes por lo que la independencia de las magnitudes globales con la malla seleccionada queda probada. Dado que los parámetros se han ajustado para que el daño comience a aparecer a un valor de carga muy cercano a la rotura, todo el tramo que se representa en la Figura 7.6 es lineal, apareciendo el daño en el último incremento de carga. La distribución de daño en las inmediaciones del agujero se muestra a continuación para cada una de las mallas utilizadas:



**Figura 7.7.** Distribución del parámetro de daño en las inmediaciones del agujero para las distintas mallas: 9600 elementos (arriba izquierda), 19968 elementos (arriba derecha), 28800 elementos (abajo izquierda) y 44928 elementos (abajo derecha)

Como puede observarse en la Figura 7.7, el modelo es capaz de localizar la zona donde el daño comienza a aparecer<sup>6</sup> y permite anticipar cuáles son las zonas en las que continúa desarrollándose. Este hecho presenta un paralelismo con el mecanismo de fallo que localiza la banda de micropandeo principal en la zona central donde existe una mayor agrupación de láminas a  $0^\circ$ . Posteriormente, empieza a transmitirse a las láminas a  $0^\circ$  que están situadas progresivamente en posiciones más alejadas del centro, hacia las superficies libres del laminado.

Sin embargo, la distribución del daño es dependiente de la malla utilizada y produce valores de tensiones diferentes. El área de la zona dañada aumenta conforme el número de elementos es mayor, debido a que estos tienen longitudes características menores que conllevan parámetros diferentes para el modelo de daño<sup>7</sup>. Este hecho, que es propio de modelos de daño locales como el que se ha utilizado, no impide calcular, con independencia del número de elementos utilizados, las magnitudes globales (Figura 7.6). Para poder paliar el efecto de la dependencia del parámetro de daño con la malla, es necesario considerar mecanismos de daño adicionales que lo limiten. Por ejemplo, la asunción de que existe una adhesión perfecta de las láminas, despreciando la delaminación, provoca la aparición de tensiones excesivas entre aquellas láminas que presentan gradientes importantes de

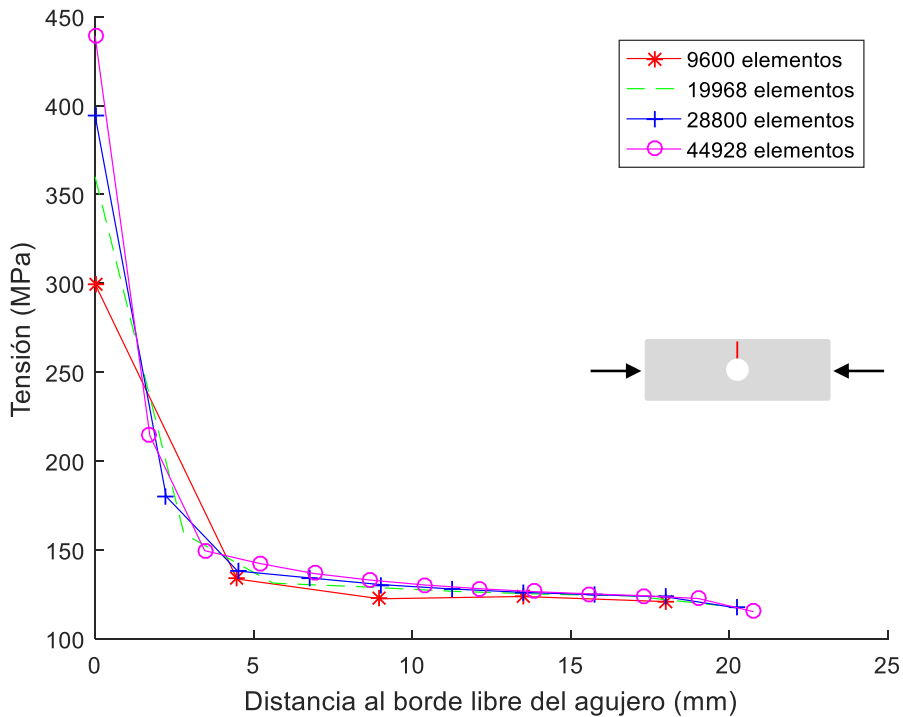
<sup>6</sup> En concreto, determina que el daño se localiza en las inmediaciones del agujero en la coordenada angular correspondiente a los puntos alineados con la dirección perpendicular a la dirección de aplicación de la carga.

<sup>7</sup> Las relaciones a las que se hace referencia se describieron en el Capítulo 6.



deformación. El valor de estas tensiones se vería disminuido si la delaminación permitiera el desplazamiento relativo entre láminas. Este efecto se magnifica conforme aumentan las superficies de contacto entre elementos o equivalentemente se afina la malla utilizada [3].

En la Figura 7.8, se representa, para las diferentes mallas, la concentración de tensiones que tiene lugar a distancias progresivamente más cercanas al borde libre del agujero. Las tensiones representadas corresponden a los puntos contenidos en la línea que va del borde del extremo libre al agujero de la lámina superior orientada a  $45^\circ$  (línea roja en el esquema de la Figura 7.8).



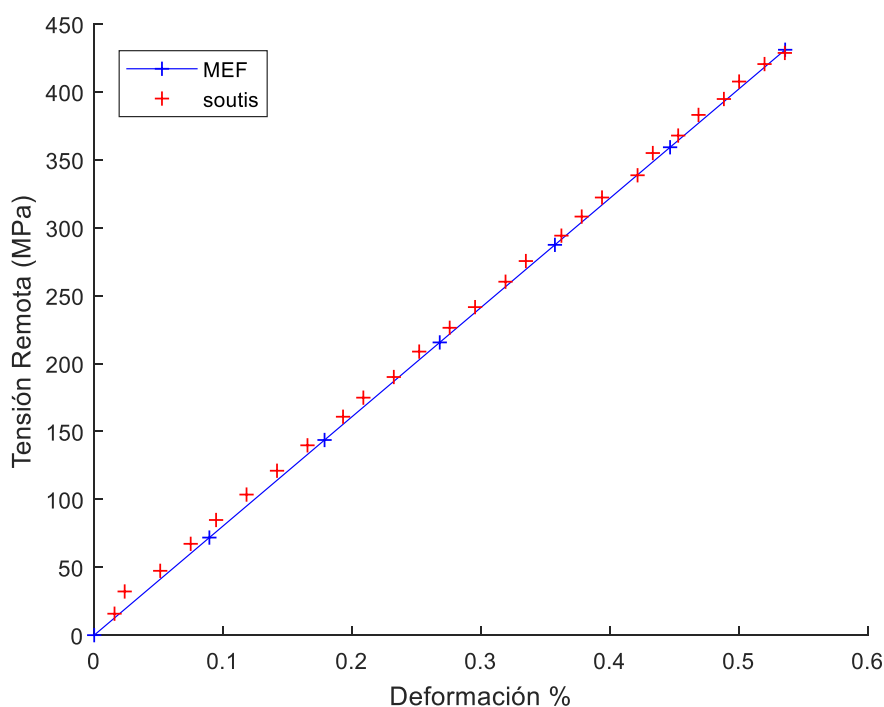
**Figura 7.8. Curvas Tensión-Distancia al borde libre para diferentes mallas**

Es importante notar que las tensiones representadas en la Figura 7.8 corresponden a una zona del laminado donde el daño aún no se ha extendido y, por tanto, no se ven afectadas por el fenómeno de dependencia de la malla propio del modelo de daño que se ha descrito. El hecho de que los valores de las tensiones representadas no sean coincidentes para las diferentes mallas, se justifica diciendo que son los valores de las tensiones en puntos de cuadratura correspondientes a puntos geométricos diferentes. Conforme la malla se va afinando, los puntos de cuadratura correspondientes al elemento colocado justo en el agujero van tendiendo asintóticamente al borde libre.

## Validación del modelo

Para los propósitos del análisis de las tensiones interlaminares que se hará en el próximo apartado, y a la vista de los resultados, se utilizará la malla de 28800 elementos, que es suficiente para recoger el detalle de la concentración de tensiones en las inmediaciones del agujero.

A continuación, se muestra una comparación de la curva tensión remota-deformación obtenida, utilizando el modelo propuesto para la malla de 28800 elementos, con los resultados aportados en [14]:



**Figura 7.9. Comparación de las curvas tensión remota-deformación del laminado con los resultados extraídos de [14]**

El modelo, ajustado con los parámetros dados en la Tabla 7-2, permite estimar las curvas globales con un grado de ajuste apropiado y permite anticipar la aparición de daño en las inmediaciones de la carga de rotura poco antes del fallo del laminado. Además, el soporte de elementos finitos permite recoger el fenómeno de concentración de tensiones en las inmediaciones del agujero y permite estudiar la distribución de las tensiones interlaminares a lo largo de la superficie libre del agujero.

## 7.4. Resultados. Análisis de las tensiones interlaminares

Usando el modelo validado, se pretende evaluar la distribución de las tensiones interlaminares que se desarrollan en laminados con diferentes orientaciones (en concreto  $[(45^\circ, -45^\circ, 0^\circ)_3]_s$  y  $[(90^\circ, 0^\circ)_3]_s$ ) cuando se someten a compresión. Dado que estas tensiones aparecen en los bordes libres, se analizarán los valores que se tienen en las inmediaciones del agujero, contrastando las diferencias que aparecen entre las diversas láminas de cada laminado.

Asimismo, se estudiará la evolución de las tensiones interlaminares a lo largo del espesor, tanto en la superficie libre del agujero como en el borde situado en el extremo del laminado. En este último estudio, se proporcionan también los resultados que se tienen en régimen elástico en ausencia de daño. La comparación que se establece permite analizar la influencia del modelo de daño en el desarrollo de dichas tensiones.

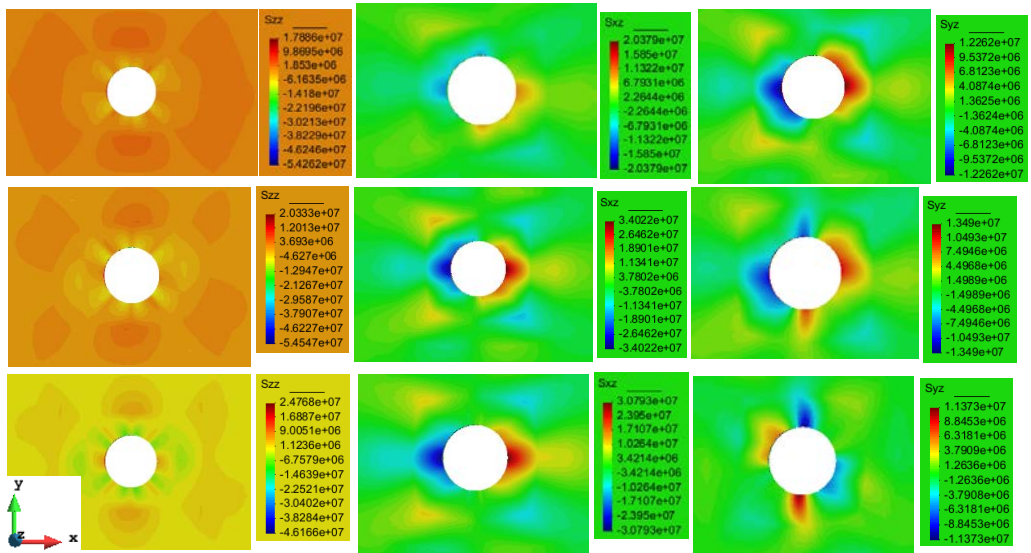


Figura 7.10. Tensiones  $\sigma_z$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$  (de izquierda a derecha) para las primeras láminas con orientaciones  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$  y  $0^\circ$  (de arriba a abajo). Laminado  $[(45^\circ, -45^\circ, 0^\circ)_3]_s$

En la Figura 7.10, se muestra la distribución de las tensiones interlaminares alrededor del agujero en las primeras láminas<sup>8</sup> de cada orientación contenida en el laminado. La carga de compresión está aplicada desde el lado derecho de las figuras mientras que la condición de

<sup>8</sup> Es importante notar que el hecho de que determinados efectos ocurran o no en la primera de las láminas con una orientación determinada, no implica que no ocurra en las siguientes con la misma orientación. Para ver el efecto en el espesor se hace el segundo de los análisis de este apartado.

contorno de empotramiento se encuentra en el lado izquierdo<sup>9</sup>. A la vista de los resultados, se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Las formas de la distribución presentan características de simetría a lo largo de dos ejes, uno alineado con la carga y otro perpendicular (ejes 'x' e 'y' respectivamente), concentrándose los máximos valores (y los mínimos también en algunos casos) alrededor de dichos ejes.
- Conforme las láminas están más cerca del núcleo central de láminas a cero, los valores absolutos de las tensiones interlaminares crecen. Este hecho es consecuencia de que, por condición de contorno, las tensiones interlaminares deben ser nulas en las superficies libres del laminado de manera que los mayores valores se darán en las láminas alojadas en el núcleo central. Esta característica tiene la excepción de la tensión  $\sigma_{xz}$  cuyos valores en las láminas a cero son algo inferiores a los valores en las láminas a  $-45^\circ$ .
- En las láminas a  $\pm 45^\circ$  se tienen valores nulos de la tensión  $\sigma_z$  en los puntos del agujero alineados con la dirección de la carga (eje 'x'), mientras que en puntos intermedios se encuentran valores de compresión. Para esta misma tensión, se observa, en la lámina a  $0^\circ$ , valores positivos en los puntos alineados con la dirección de la carga y en los situados en las coordenadas angulares con valores múltiplos impares de  $45^\circ$ , alternados con valores de compresión conforme se recorre el borde del agujero. Esta alternancia de valores positivos con valores negativos producirá un cierto alabeo de la lámina provocándose delaminación en aquellas zonas donde se tengan valores positivos. La presencia de este mecanismo de fallo, que no se ha modelado explícitamente, puede anticiparse a la vista de los resultados que recogen un efecto que se observa experimentalmente en las inmediaciones del agujero precediendo a la rotura [14].
- La tensión de cortadura  $\sigma_{xz}$  produce sus valores máximos y mínimos en los puntos del borde libre del agujero alineados con la carga (eje 'x') mientras que presenta valores nulos en los puntos alineados en la dirección perpendicular (eje 'y'). Esta tensión presenta también una segunda serie de máximos y mínimos (más alejados del agujero) en los puntos situados en las coordenadas angulares de valores múltiplos impares de  $45^\circ$ .
- La tensión de cortadura  $\sigma_{yz}$  es la componente de tensión interlaminar con menores valores. Presenta sus máximos y mínimos en los puntos alineados con la dirección de la carga (eje 'x') en la lámina con fibras a  $45^\circ$ . En las láminas con fibras a  $-45^\circ$  y  $0^\circ$ ,

---

<sup>9</sup> El ancho del laminado se dispone según el eje 'y' de la Figura 7.10 mientras que la carga de compresión se aplica según el eje 'x'. El espesor se distribuye según el eje 'z'.

aparece otro máximo y otro mínimo en los puntos alineados con la dirección perpendicular a la aplicación de la carga (eje 'y'). Los valores de esta segunda serie de máximos son del mismo orden que los valores de los primeros máximos para la lámina a  $0^\circ$  y  $-45^\circ$ .

En la Figura 7.11, se muestran las tensiones interlaminares para el laminado  $[(90_2^0, 0_2^0)_3]_s$ , sometido a las mismas condiciones de contorno y carga:

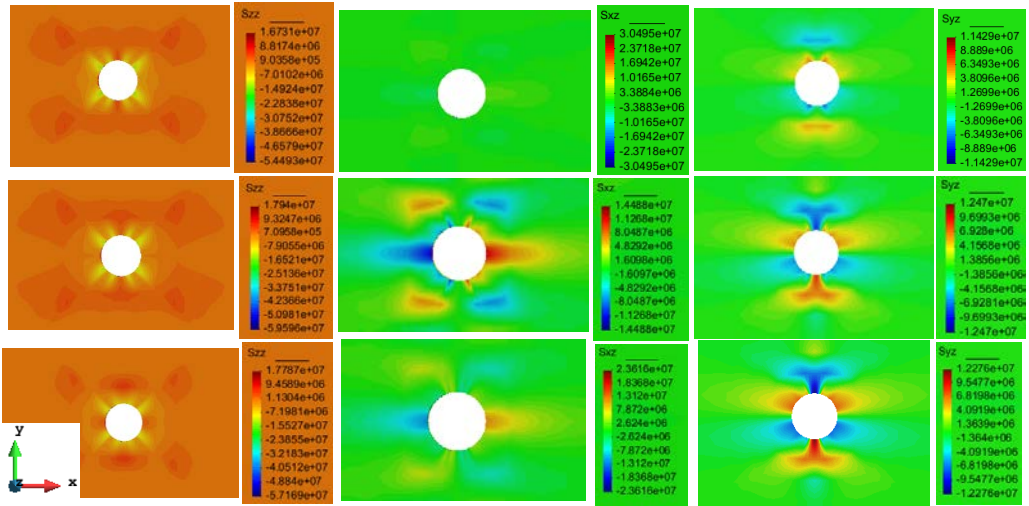


Figura 7.11. Tensiones  $\sigma_z$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$  (de izquierda a derecha) para las primeras láminas con orientaciones  $90^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $0^\circ$  (de arriba a abajo). Laminado  $[(90_2^0, 0_2^0)_3]_s$

Las principales diferencias de las tensiones interlaminares representadas en la Figura 7.11 y las representadas en la Figura 7.10, se pueden resumir en los siguientes aspectos:

- La alternancia de valores positivos y negativos de la tensión  $\sigma_z$  que sólo se observaba, en el caso anterior en la lámina a  $0^\circ$ , se traslada también a las láminas  $90^\circ$  en este caso.
- Los valores de las tensiones de cortadura  $\sigma_{xz}$  son algo inferiores para el laminado  $[(90_2^0, 0_2^0)_3]_s$ . Se tienen valores nulos en la primera de las láminas a  $90^\circ$  mientras que las distribuciones de tensión en los puntos alineados con la dirección de la carga (eje 'x') se concentran más sobre el eje, volviéndose más alargadas que en el caso anterior.
- En cuanto a la tensión de cortadura  $\sigma_{yz}$ , los valores máximos, en este caso, se concentran en puntos de coordenada angular de valor múltiplo impar de  $45^\circ$ . En el

caso de la segunda lámina a  $90^\circ$  y la primera a  $0^\circ$  se encuentran concentraciones adicionales de tensiones máximas y mínimas en los puntos alineados según la dirección perpendicular al eje de aplicación de la carga (eje 'y').

En la Figura 7.12, se muestran los niveles de daño, en las inmediaciones del agujero, que se tienen en los dos casos estudiados:

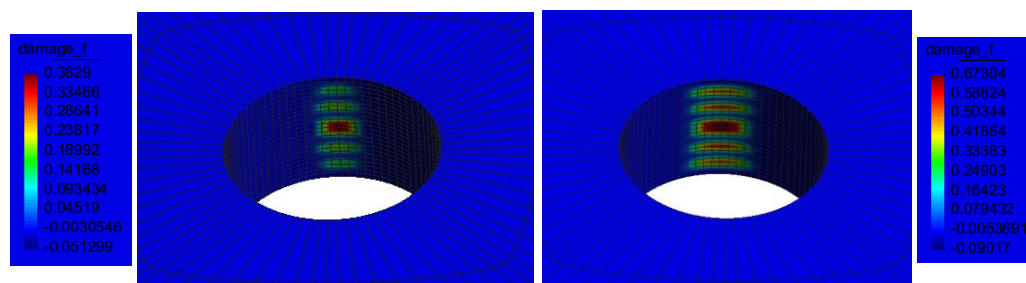
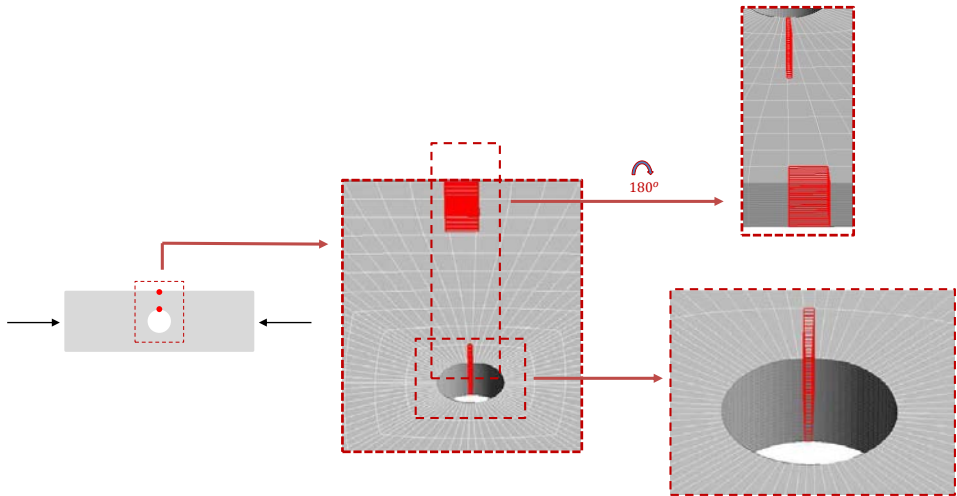


Figura 7.12. Distribución del parámetro de daño. Laminado  $[(45^\circ, -45^\circ, 0^\circ)_3]_s$  (izquierda). Laminado  $[(90^\circ, 0^\circ)_3]_s$  (derecha)

Como puede verse, los niveles de daño, en el caso del segundo laminado, son notablemente superiores a los del primer caso. Este resultado es razonable ya que, en el segundo caso, la presencia de las láminas cuyas fibras están dispuestas según el eje 'y' (fibras a  $90^\circ$ ) aumentan los niveles de tensión de las fibras a  $0^\circ$ , produciendo que éstas aumenten sus niveles de daño.

A continuación, se expone la evolución de las tensiones interlaminares a lo largo del espesor del laminado. Se muestran los valores correspondientes a los elementos situados en las posiciones donde se encuentran mayores tensiones de compresión en la dirección de la carga<sup>10</sup>, en los bordes libres del agujero y el extremo del laminado. La situación se representa en la Figura 7.13:

<sup>10</sup> Y los mayores valores absolutos de tensión de todo el dominio (zona situada bajo el punto rojo en el borde del agujero, parte izquierda de la Figura 7.13). Estos valores se dan concretamente en las láminas centrales cuyas fibras se encuentran orientadas en la dirección de la carga.



**Figura 7.13.** Situación de los elementos (en rojo) donde se estudian las componentes de tensión interlaminar a lo largo del espesor. Localización de los espesores (izquierda). Vista general (central). Detalle del borde extremo (derecha superior). Detalle del agujero (derecha inferior)

Es importante aclarar que los valores representados son los correspondientes a los puntos de cuadratura de los elementos que se han indicado en la Figura 7.13, por tanto, sus coordenadas espaciales presentan valores intermedios a los de los nodos que conforman cada uno de los elementos. Por este motivo, las coordenadas que se presentan en las ordenadas de la Figura 7.14, Figura 7.15 y Figura 7.16 son valores aproximados equiespaciados entre ellas.

Se presentan los valores de las tensiones interlaminares, a lo largo del espesor, obtenidas utilizando el modelo de daño, y se comparan con los valores que se obtienen suponiendo un comportamiento elástico donde se ha desactivado el daño. Se presentan los resultados correspondientes al laminado  $[(45^\circ, -45^\circ, 0^\circ)_3]_s$  (llamado laminado A) y los correspondientes al laminado  $[(90^\circ_2, 0^\circ_2)_3]_s$  (llamado laminado B):

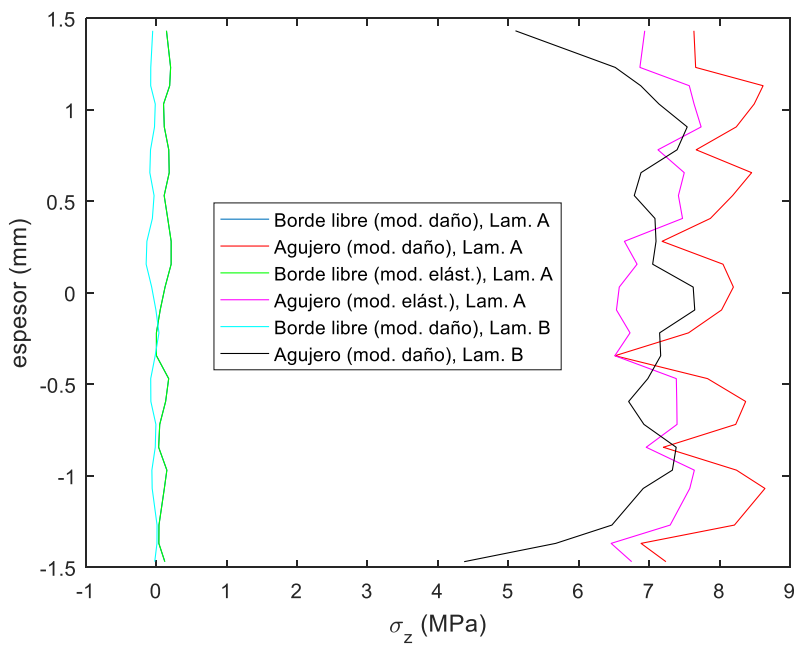


Figura 7.14. Tensión  $\sigma_z$  a lo largo del espesor

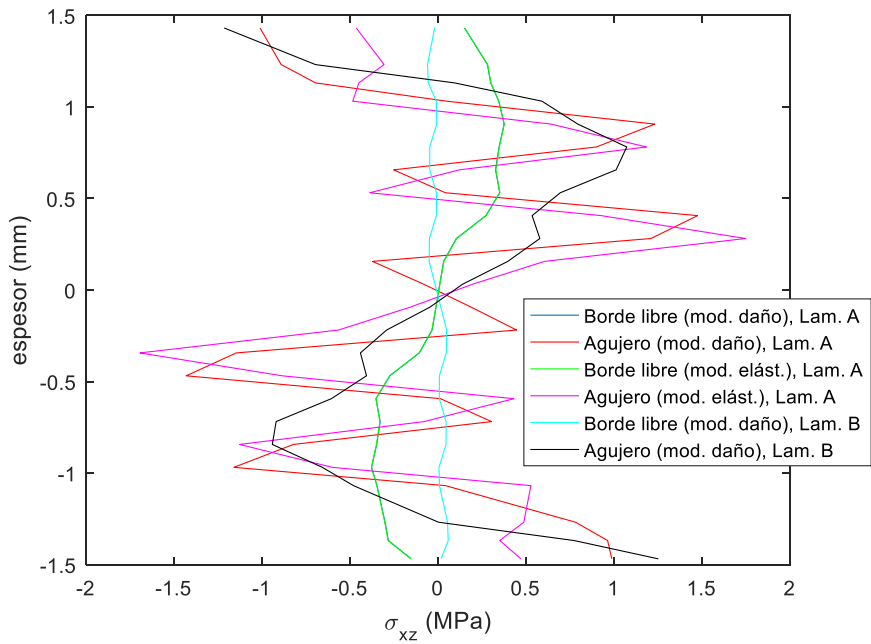
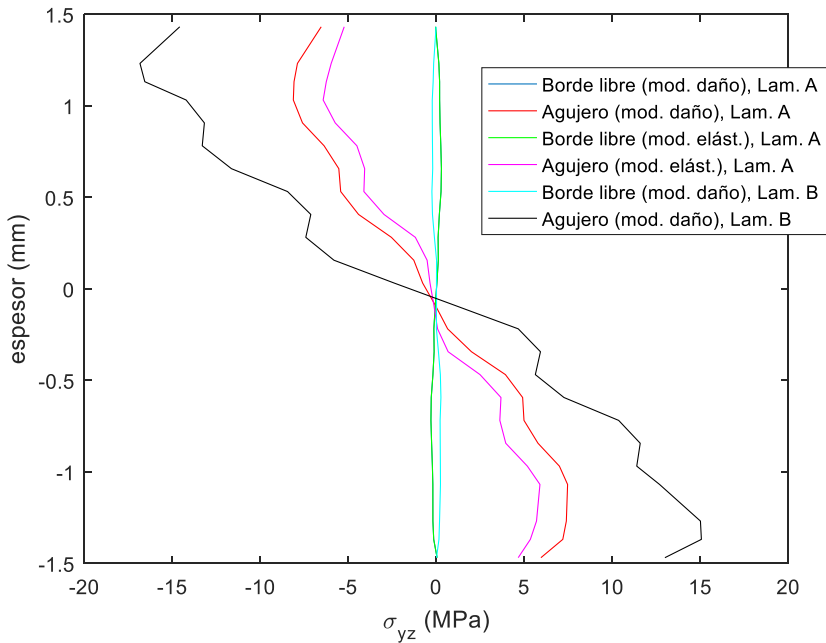


Figura 7.15. Tensión  $\sigma_{xz}$  a lo largo del espesor





**Figura 7.16. Tensión  $\sigma_{yz}$  a lo largo del espesor**

De la observación de los resultados expuestos y con respecto al laminado A, se puede afirmar:

- Debido a que el daño se localiza en las inmediaciones del agujero, las curvas que representan las tensiones en el borde libre extremo obtenidas con daño (curva azul) y sin daño (curva verde) prácticamente coinciden. Sin embargo, las tensiones interlaminares desarrolladas en el borde libre del agujero, en la presencia de daño (curva roja), son mayores que las que se tienen según un desarrollo elástico (curva magenta).
- El modelo reproduce una distribución simétrica de las tensiones interlaminares respecto del plano coordenado 'xy'<sup>11</sup>, tal y como anticipa la condición de simetría geométrica del laminado y la carga aplicada.
- La presencia de picos viene producida por el cambio de inclinación de las fibras a lo largo de las láminas en el espesor y la presencia de interfases. Este tipo de comportamientos asintóticos es similar a los que se obtuvieron en el Capítulo 3.

<sup>11</sup> El hecho de que las tensiones no sean exactamente simétricas responde a que dichas tensiones corresponden a los puntos de cuadratura, cuya distribución a lo largo del espesor no es exactamente simétrica.

- La tensión  $\sigma_z$  que se tiene en las inmediaciones del agujero es positiva. Este hecho contribuirá a la aparición de delaminación en las interfases interiores del agujero. En el caso del borde libre del extremo del laminado, dichas tensiones son prácticamente nulas.
- La tensión de cortadura  $\sigma_{xz}$  presenta un comportamiento caracterizado por cambios de signo alrededor de cero a lo largo del espesor, en el borde libre del agujero. Estas tensiones pueden propiciar que las láminas con diferentes orientaciones deslicen entre sí favoreciendo la rotura transversal por cortadura. En este caso, la presencia de daño reduce ligeramente el valor de estas tensiones, a lo largo del espesor, y presentan sus valores mayores en un tramo centrado con un espesor igual a un tercio del total. Las tensiones que se desarrollan en el borde libre del extremo son inferiores y sólo presentan un cambio de signo a la altura del plano medio del laminado.
- La tensión de cortadura  $\sigma_{yz}$  cambia de signo a través del espesor sólo en el plano medio del laminado, en las inmediaciones del agujero, y presenta sus valores máximos a un sexto del espesor desde las superficies libres. En el borde libre, situado en el extremo, los valores para esta tensión son prácticamente nulos por condición de contorno.

En cuanto a los resultados correspondientes al laminado *B* (curva negra para las tensiones en el agujero y celeste para el borde libre extremo), se pueden hacer las siguientes precisiones:

- Los valores para la tensión  $\sigma_z$  que se tienen para este laminado son similares a los del caso anterior. Sin embargo, los valores máximos que, en las inmediaciones del agujero, también son positivos, se concentran en una zona central con longitud igual a dos tercios del espesor total del laminado.
- Las tensiones de cortadura  $\sigma_{xz}$  presentan para este laminado un número de cambios de signo, a lo largo del espesor, que se reduce a tres. Los valores mayores para esta tensión se dan en posiciones situadas a una distancia igual a un tercio del espesor total desde las superficies libres del laminado. Dichos máximos presentan signos contrarios. En el borde libre extremo, se tienen valores más cercanos a cero que las correspondientes del caso anterior.
- Las tensiones de cortadura  $\sigma_{yz}$  presentan una distribución con una forma similar a las del caso anterior, triplicando prácticamente sus valores. De nuevo, estas tensiones son cero en el borde libre extremo, verificando la condición de contorno.

# Bibliografía

- [1] Wisnom, M. R.; Hallett, S. R. & Soutis, C., «Scaling Effects in Notched Composites,» *Journal of Composite Materials*, vol. 44, nº 2, pp. 195-210, 2010.
- [2] Camanho, P. P.; Maimí, P. & Dávila, C. G., «Prediction of size effects in notched laminates using continuum damage mechanics,» *Composites Science and Technology*, vol. 67, pp. 2715-2727, 2007.
- [3] Chen, B. Y.; Tay, T. E.; Baiz, P. M. & Pinho, S. T., «Numerical analysis of size effects on open-hole tensile composite laminates,» *Composites: Part A*, vol. 47, pp. 52-62, 2013.
- [4] Hallet, S. R.; Green, B. G.; Jiang, W. G. & Wisnom, M. R., «An experimental and numerical investigation into the damage mechanisms in notched composites,» *Composites: Part A*, vol. 40, pp. 613-624, 2009.
- [5] Pierron, F.; Green, B.; Wisnom, M. R. & Hallet, S. R., «Full-field assesment of the damage process of laminated composite open-hole tensile specimens. Part II: Experimental results,» *Composites: Part A*, vol. 38, pp. 2321-2332, 2007.
- [6] Pierron, F.; Green, B.; Wisnom, M. R. & Hallet, S. R., «Full-field assesment of the damage process of laminated composite open-hole tensile specimens. Part I: Methodology,» *Composites: Part A*, vol. 38, pp. 2307-2320, 2007.
- [7] O'Higgins, R. M.; McCarthy, M. A. & McCarthy, C. T., «Comparison of open-hole tension characteristics of high strength glass and carbon fibre-reinforced composite materials,» *Composite Science and Technology*, vol. 68, pp. 2770-2778, 2008.
- [8] Erçin, G. H.; Camanho, P. P.; Xavier, J.; Catalanotti, G.; Madhi, S. & Linde, P., «Size effects on the tensile and compressive failure of notched composite laminates,» *Composite Structures*, vol. 96, pp. 736-744, 2013.
- [9] Green, B. G.; Wisnom, M. R. & Hallet, S. R., «An experimental investigation into the tensile strength scaling of notched composites,» *Composites: Part A*, vol. 38, pp. 867-878, 2007.
- [10] Balacó de Morais, A., «Open-hole tensile strength of quasi-isotropic laminates,» *Composites Science and Technology*, vol. 60, pp. 1997-2004, 2000.
- [11] Soutis, C. & Fleck, N. A., «Static Compression Failure of Carbon Fibre T800/924C Composite Plate with a Single Hole,» *Journal of Composite Materials*, vol. 24, pp. 536-558, 1990.
- [12] Gail, E. & Bradley, W. L., «A Detailed Investigation of the Micromechanisms of Compressive Failure in Open Hole Composite Laminates,» *Journal of Composite*

*Materials*, vol. 23, pp. 479-504, 1989.

- [13] Soutis, C.; Curtis, P. T. & Fleck, N. A., «Compressive failure of notched carbon fibre composites,» *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. 440, nº 1909, pp. 241-256, 1993.
- [14] Soutis C.; Fleck, N. A. & Curtis, P. T., «Hole-hole interaction in carbon fibre/epoxy laminates under uniaxial compression,» *Composites*, vol. 22, nº 1, pp. 31-38, 1991.
- [15] Suemasu, H., Takahashi, H. & Ishikawa, T., «On failure mechanisms of composite laminates with an open hole subjected to compressive load,» *Composites Science and Technology*, vol. 66, pp. 634-641, 2005.
- [16] Soutis C., «Compressive strength of composite laminates with an open hole: Effect of ply blocking,» *Journal of Composite Materials*, vol. 47, nº 20-21, pp. 2503-2512, 2012.
- [17] Kureemun, U. & Ridha, M. & Tay, TE, «Biaxial tensile-compressive loading of unnotched and open-hole carbon epoxy crossply laminates,» *Journal of Composite Materials*, vol. 49, nº 23, pp. 2817-2837, 2014.
- [18] Luccioni, B. & Oller, S., «A directional damage model,» *Comput. Methods Applied Mech. Eng.*, vol. 192, pp. 1119-1145, 2003.
- [19] Ortiz, M., «A constitutive theory for inelastic behaviour of concrete,» *Mech. Mater.*, vol. 4, pp. 67-93, 1985.

## 8. Conclusiones y Trabajos Futuros



## 8.1. Síntesis del trabajo

En esta Tesis Doctoral, se han analizado las tensiones interlaminares que aparecen en las inmediaciones de los bordes libres de laminados de material compuesto que tienen concentradores de tensión. El trabajo se ha planteado siguiendo una progresión en la complejidad de los fenómenos de borde libre que se estudian y que se corresponden con los dos objetivos parciales que se plantearon en el Capítulo 1 de esta tesis.

En primer lugar, se han analizado las tensiones fuera del plano que aparecen en los bordes libres de laminados intactos, en la interfase entre láminas cuyas fibras se encuentran orientadas según diferentes direcciones. En este caso, desarrollado en el Capítulo 3, se ha preferido sacrificar generalidad a la hora de estudiar estados de carga cualesquiera o superficies curvas, como las que se tienen en el interior de agujeros, en favor de disponer de una formulación que, simplificada, pueda ser resuelta con un esquema de diferencias finitas de sencilla implementación. La modelización del laminado se ha realizado desde un punto de vista macromecánico, considerando cada lámina como un material homogéneo ortótropo cuyas propiedades mecánicas se han tomado de la literatura. Con el esquema de diferencias finitas validado, tanto con resultados experimentales como con resultados obtenidos de la literatura, se ha realizado un estudio sistemático de laminados simétricos sometidos a estados uniaxiales de tracción, con diferentes secuencias de apilamiento y orientaciones de las fibras. Se han comparado los valores de las tensiones interlaminares, a la altura de las interfases, en los bordes libres para cada una de las secuencias de apilamiento y diferentes orientaciones. La comparación de los máximos de tensión ha permitido determinar, en cada caso, cuál será el mecanismo de fallo que potencialmente aparecerá. Las conclusiones extraídas, a la vista de los resultados, en el último apartado del Capítulo 3, han motivado la segunda fase de este trabajo en la que se ha desarrollado una herramienta que permite la inclusión de daño y el análisis de laminados con zonas de geometrías curvas y sometidos a condiciones de carga más generales.

En esta segunda fase, expuesta en los Capítulos 4 a 7 de la presente tesis, se han estudiado las tensiones interlaminares que se desarrollan en laminados simétricos que tienen concentradores de tensión y que se someten a estados de compresión uniaxial. Para modelar apropiadamente el fenómeno de micropandeo, inherente a la compresión, que aparece en las inmediaciones del agujero en las fibras de las láminas a cero, se ha propuesto un modelo de daño continuo isótropo. Asimismo, para caracterizar constitutivamente el laminado se ha seguido, en este caso, un punto de vista micromecánico que utiliza como soporte teórico la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo y que permite construir, a partir de las propiedades de los materiales constituyentes, el comportamiento mecánico de todo el laminado. Estos elementos se han incorporado en un soporte de elementos finitos, desarrollado para esta tesis, que permite estudiar cualquier geometría y cualquier estado de carga general. La herramienta resultante se ha utilizado para analizar un caso concreto extraído de la literatura, consistente en un laminado con agujero y cuyas fibras, en cada una de las láminas, se encuentran orientadas según diferentes direcciones. A partir de los resultados obtenidos, se ha determinado la influencia de la secuencia de apilamiento en las tensiones interlaminares que se desarrollan, a lo largo del espesor, en las inmediaciones del borde libre del agujero y el extremo del laminado. Además, se ha analizado el efecto del daño en el desarrollo de dichas tensiones.

## 8.2. Conclusiones

Tras el análisis de los resultados obtenidos en este trabajo, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- El modelo de diferencias finitas, expuesto en el Capítulo 3, produce resultados que presentan un buen acuerdo con los resultados experimentales, empleando como variable de comparación el desplazamiento longitudinal de la probeta. Esta variable puede ser medida experimentalmente de forma relativamente simple mediante técnicas ópticas. Se ha demostrado que el gradiente de desplazamiento longitudinal permite corroborar la presencia de tensiones interlaminares en las inmediaciones de los bordes libres.
- Se ha puesto de manifiesto que la orientación y la secuencia de apilamiento de las láminas tiene una influencia muy importante en las tensiones interlaminares que aparecen en las cercanías de los bordes libres. Las orientaciones donde aparecen tensiones normales de tracción, en dirección del espesor del laminado, serán proclives a la aparición de delaminación mientras que en aquellas que se tengan los máximos valores de las tensiones interlaminares tangenciales, se tendrá que el modo preferente será la rotura transversal por cortadura. De este modo, el modelo desarrollado en el Capítulo 3 puede ser utilizado para definir secuencias de apilamiento y orientaciones que reduzcan las posibilidades de aparición de estos modos de fallo para un nivel de carga determinado.
- El modelo fenomenológico propuesto en la segunda parte de la tesis necesita, antes de ser utilizado para analizar casos concretos, las propiedades mecánicas de la fibra y la matriz. Dado que en el caso estudiado en el Capítulo 7, no se disponía de dicha información, ha sido necesario realizar un proceso sistemático de calibrado que permita fijar las características mecánicas de los componentes y los parámetros del modelo de daño. Este calibrado se ha realizado comparando los resultados que proporciona el modelo con un ensayo de compresión sobre un laminado unidireccional. Se ha demostrado que los resultados de la calibración estiman unas propiedades de la fibra y la matriz coherentes y permiten reproducir de forma precisa los resultados experimentales correspondientes a laminados multidireccionales.
- El buen ajuste que se encuentra para los resultados correspondientes al laminado multidireccional (con y sin agujero) cuando se utiliza el modelo calibrado con los datos del laminado unidireccional sin agujero, permite concluir que la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo conjuntamente con un modelo de daño continuo isótropo para las fibras modela adecuadamente la ortotropía del laminado y predice la respuesta del mismo.



- El modelo permite reproducir la evolución del daño y localizar la aparición del mismo. En los laminados analizados, se ha observado que el daño surge en la zona central donde se localiza el agrupamiento de mayor espesor de láminas orientadas en la dirección de la carga y, posteriormente, se propaga a los agrupamientos de láminas con la misma orientación situadas progresivamente más cerca del borde libre. Esta zona se puede identificar, por tanto, con la zona afectada por el efecto del micropandeo propio de las cargas de compresión que se aplican en este caso.
- En el problema estudiado, únicamente se ha activado el modo de fallo de la fibra, asumiendo comportamiento elástico sin daño en la matriz. Esta asunción se corresponde con el hecho (que se ha asumido en este trabajo) de que la iniciación del fallo por compresión en un laminado viene gobernado por el micropandeo de las fibras en aquellas láminas orientadas con la dirección de la carga. Esta hipótesis se ha demostrado válida para predecir la iniciación del fallo y permite modelar con suficiente precisión la mayor parte del proceso de deformación. Sin embargo, para modelar la caída de carga asociada a la progresión del fallo en laminados con agujero es necesario incorporar el modo de fallo de la matriz en las láminas no orientadas con la dirección de la carga.
- A pesar de que los parámetros del modelo de daño desarrollado en esta tesis, como todos los modelos de daño local, presentan una dependencia del tamaño de malla, éste permite obtener, cuando el daño se encuentra localizado, las magnitudes globales, independientemente de la longitud característica de los elementos. Adicionalmente, la zona de daño que proporciona el modelo permite extraer conclusiones cualitativas sobre su forma y la distribución que presenta. Los valores del parámetro de daño presentan valores crecientes con el número total de elementos de la malla.
- La distribución de las tensiones interlaminares alrededor del agujero presentan características de simetría alrededor del eje de aplicación de la carga y el eje perpendicular. El signo de las mismas, conforme se recorre la coordenada angular, varía, presentando máximos y mínimos que, dependiendo del caso, se pueden encontrar en los puntos alineados con el eje de aplicación de la carga, el eje perpendicular o en puntos de coordenadas angulares múltiplos impares de  $45^\circ$ . La alternancia de valores positivos y negativos de la tensión normal  $\sigma_z$  reproduce la tendencia, en las inmediaciones del agujero, del material a alabearse, constituyendo zonas propicias a la aparición de delaminación.
- El valor de las tensiones interlaminares, en las inmediaciones del agujero, a través del espesor del laminado, es mayor que el valor de las mismas tensiones, a través del espesor, en el extremo del laminado. Este hecho permite concluir que el agujero actúa de concentrador, además de para las tensiones en el plano, de las tensiones interlaminares. Por otro lado, en cada interfase se producen comportamientos asintóticos que cambian la tendencia de las tensiones al pasar de una lámina a otra. Dado que el daño se concentra en los alrededores del agujero, las tensiones

interlaminares en el extremo del laminado no se ven afectadas por el efecto de la degradación. Sin embargo, el daño magnifica el valor de las tensiones interlaminares, a lo largo del espesor, cerca del agujero.

- La tensión normal  $\sigma_z$ , en las inmediaciones del agujero, es de tracción y, por tanto, contribuirá a la aparición de delaminación en la coordenada angular que se ha estudiado. El cambio de la secuencia de apilamiento produce que las tensiones disminuyan (aunque conservan su valor positivo) y se concentren en una zona más cercana al plano medio del laminado.
- La tensión de cortadura  $\sigma_{xz}$ , a lo largo del espesor, presenta cambios de signo en cada interfase, entre láminas con fibras dispuestas según diferentes orientaciones. Este efecto producirá que este laminado sea proclive a iniciar mecanismos de rotura transversal. En este caso, el cambio de secuencia de apilamiento reduce esta tendencia al limitar el número de cambios de signo, a través del espesor, a tres. La segunda secuencia de apilamiento también reduce, prácticamente a valores nulos, el valor de esta tensión en el borde libre del extremo del laminado.
- La tensión  $\sigma_{yz}$  presenta un único cambio de signo en el plano medio del laminado y presenta sus máximos en zonas cercanas a las superficies libres del laminado lejos de la zona central. El modelo permite reproducir la condición de borde libre de tensiones en el extremo del laminado que implica valores nulos de la tensión en esta zona. Asimismo, la presencia de daño aumenta considerablemente los valores de la distribución de esta tensión a lo largo del espesor.

### 8.3. Trabajos futuros

Tras la exposición de las conclusiones del trabajo realizado, en este apartado, se proponen líneas de investigación que permitirán aumentar el grado de detalle con el que el modelo propuesto, en la segunda parte de esta tesis, es capaz de describir la física de los fenómenos estudiados. Los trabajos futuros previstos para complementar el estudio realizado se describen a continuación:

- El fenómeno de micropandeo de las fibras asociado a cargas de compresión, antes de inestabilizarse y volver incapaz a la estructura de soportar carga, se propaga a las zonas colindantes mientras que la carga aplicada crece, aumentando al principio, la capacidad resistente de la estructura. Este hecho sugiere la posibilidad de considerar un modelo de daño que inicialmente produzca un aumento de la rigidez de la estructura para, posteriormente, colapsar y reducir los niveles tensionales de forma abrupta. Este **modelo de endurecimiento-ablandamiento** implicaría incluir, para la fibra, una primera fase de endurecimiento que, tras rebasar una determinada cota tensional, continuase con el ablandamiento que se ha considerado en este trabajo.

- Tras el ablandamiento y la rotura de las fibras en las láminas orientadas en la dirección de la carga, sigue un proceso de agrietamiento de la matriz, que empieza en las inmediaciones del agujero, y que finaliza con el colapso de la estructura, eliminando completamente la capacidad de resistencia de la misma. Este efecto de agrietamiento de la matriz, localizado en las láminas con fibras inclinadas respecto de la dirección de la carga, se puede incluir en el modelo activando los **parámetros de daño para la matriz**. Estos parámetros han sido incluidos en el modelo e incorporados en el código numérico, pero no han sido empleados todavía. Este efecto sumado al pandeo de las fibras permitiría obtener la caída de la carga aplicada en el ensayo de compresión, con desplazamiento impuesto, del laminado con agujero.
- El fenómeno de dependencia de la malla de la variable de daño que se ha mostrado se produce por la supeditación de los parámetros del modelo a la longitud característica del elemento. Tal y como se ha visto, el nivel de daño aumenta con el número de elementos, por lo tanto, es necesario introducir algún mecanismo de compensación que equilibre las sobretensiones en la zona de la malla donde hay valores importantes de daño. Una posibilidad, en este sentido, sería introducir el **efecto de la delaminación** que se produce en las inmediaciones de los bordes libres y que permitiría liberar las sobretensiones que aparecen. Este efecto que se produce a través de las superficies entre elementos permitiría reducir los niveles de tensión y, por tanto, disminuir el nivel de daño que produce el afinamiento de la malla. Cuantos más elementos se utilicen para discretizar un mismo volumen del dominio, más superficie interelemental estará disponible para desarrollar delaminación que compense la sobretensión producida por el aumento de elementos al afinar la malla.
- En el soporte de elementos finitos que se definió en el Capítulo 4, se ha previsto la presencia de matrices de masa y amortiguamiento cuando el problema sea dinámico. Sin embargo, para poder implementar **problemas dinámicos** se hace necesario introducir una discretización temporal mediante diferencias finitas que permita escribir los valores de la velocidad y la aceleración nodal en función de los desplazamientos de los nodos. Para ello será necesario implementar el Método de Newmark u otro equivalente, tal y como se refirió en el capítulo correspondiente.
- Cuando los niveles de degradación sean importantes o haya que incluir matrices de masa y/o amortiguamiento para resolver problemas dinámicos, la capacidad del método de converger a la solución, en un número razonable de iteraciones, puede ser insuficiente. Por este motivo, se propone **la implementación de métodos complementarios** al Método de Newton-Raphson que permitan determinar las direcciones adecuadas del vector incremento de desplazamiento, en cada iteración hacia el equilibrio, que aseguren y/o aceleren la convergencia. Algunos ejemplos de estos métodos serían el algoritmo de *'Line-Search'* o el algoritmo de control de respuesta *'Arc-Length'*.

## 8.4. Diseminación de resultados

En este apartado, se enumeran los artículos y ponencias a congresos a las que ha dado lugar el desarrollo de esta tesis:

- A. Solís; S. Sánchez-Saez & E. Barbero. Análisis de las tensiones fuera del plano en laminados mediante diferencias finitas. Asociación Española de Materiales Compuestos. XII Congreso Nacional de Materiales Compuestos – MATCOMP 2017. Este trabajo ha sido aceptado para su publicación en la revista de Materiales Compuestos.
- A. Solís; S. Sánchez-Saez & E. Barbero. Influence of ply orientation on free-edge effects in laminates subjected to in-plane loads. Composites Part B. (En revisión).
- A. Solís; S. Sánchez-Saez & E. Barbero. Characterization of composite laminates under uniaxial compression load using the Serial/Parallel Mixing Theory. ICCS21. 21<sup>st</sup> International Conference on Composite Structures. (Bologna, septiembre 2018).